SACHSEN-ANHALT

Kultusministerium

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2008

Mathematik
(Grundkursniveau)

Arbeitszeit: 210 Minuten

Es sind die drei Pflichtaufgaben und eine Wahlpflichtaufgabe zu lösen.
Der Prüfling entscheidet sich für eine Wahlpflichtaufgabe.

Die zur Bewertung vorgesehene Wahlpflichtaufgabe ist vom Prüfling anzukreuzen.

☐ Wahlpflichtaufgabe 4.1 ☐ Wahlpflichtaufgabe 4.2

(Unterschrift)

Pflichtaufgaben **Aufgabe 1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f, g und h.
Von der Funktion f mit $y = f(x)$, $x \in R$, sind folgende Eigenschaften bekannt, die die Funktion eindeutig bestimmen:

- Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades.
- Der Graph von f ist symmetrisch zur y-Achse.
- Die Funktion f hat genau zwei Nullstellen: $x_{1;2} = \pm\sqrt{5}$.
- Der Graph von f hat den Tiefpunkt T(0 | 5) und die Hochpunkte $H_{1;2}(\pm 1 \mid \frac{16}{3})$.

Von der Funktion g ist bekannt: $y = g(x) = e^{-x} + 4$; $x \in R$.
Von der Funktion h ist bekannt: $y = h(x) = f(x) - g(x)$; $x \in R$.

a) Skizzieren Sie unter Verwendung der gegebenen Eigenschaften den Graphen der Funktion f.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Funktion.

[zur Kontrolle: $y = f(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - 5)(x^2 + 3)$]

b) Weisen Sie nach, dass die Funktion g monoton fallend ist und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion g für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

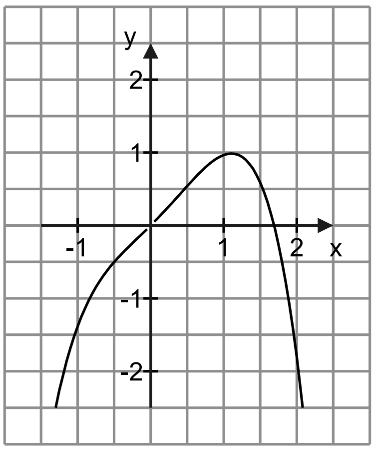
Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g für $-1 \leq x \leq 4$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a.

Die Graphen der Funktion f und der Funktion g schneiden einander in genau zwei Punkten.
Berechnen Sie die Abszisse des Schnittpunktes im I. Quadranten mit dem Newton-Verfahren auf Tausendstel genau.

Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die die Graphen der Funktionen f und g vollständig einschließen.

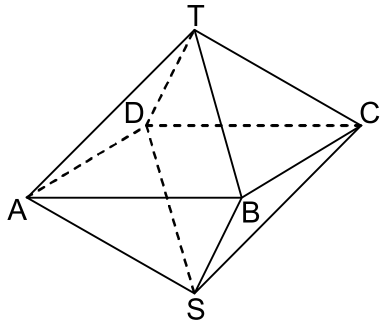
c) Die Abbildung zeigt einen Teil des Graphen der Funktion h.

Schlussfolgern Sie unter Verwendung dieser Abbildung aus den Nullstellen der Funktion h und der Lage des Hochpunktes des Graphen von h auf die gegenseitige Lage der Graphen von f und g.



Pflichtaufgaben **Aufgabe 2**
Analytische Geometrie

Acht transparente dreieckige Werbeflächen sollen wie in der Abbildung in Form eines Oktaeders*) angeordnet werden.
Die Anordnung wird in einem kartesischen Koordinatensystem beschrieben; eine Einheit entspricht einem Meter.
Vom Oktaeder ABCDST sind folgende Punkte gegeben:
A(2 | 0 | 4), B(–2 | 5 | 1), C(2 | 10 | 4) und T(–1 | 5 | 8).



Oktaeder ABCDST
(Abbildung nicht maßstäblich)

a) Weisen Sie nach, dass das Dreieck ABC gleichschenklig und rechtwinklig ist.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes D so, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

Stellen Sie eine Koordinatengleichung derjenigen Ebene auf, in der die Punkte A, B und T liegen.

b) Um eine effektvolle Beleuchtung zu erreichen, soll in die Anordnung eine verspiegelte Kugel so eingebaut werden, dass sie jede der Werbeflächen in genau einem Punkt berührt.
Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Kugel an, und berechnen Sie die Länge des Radius dieser Kugel.

*) *Ein Oktaeder ist ein Körper, der von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt wird.*

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Eine Großbäckerei produziert Kekse, die erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,3 beim Abpacken beschädigt werden. Die Kekse werden in Tüten zu je 5 Stück verpackt. Vor der Auslieferung wird stichprobenartig die Anzahl beschädigter Kekse je Tüte ermittelt.

a) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl beschädigter Kekse in einer Tüte.
Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angesehen werden kann, berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:
A: In einer Tüte sind genau 2 Kekse beschädigt.
B: In einer Tüte sind mindestens 4 Kekse nicht beschädigt.

In einem Probelauf wird ein neues Verpackungsverfahren getestet, von dem man sich eine Verminderung des Anteils beschädigter Kekse verspricht. Von 100 Tüten wird jeweils die Anzahl der Tüten mit beschädigten Keksen ermittelt. Das Ergebnis ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt. Dabei sei H(x) die Anzahl der Tüten mit genau x beschädigten Keksen.

x	0	1	2	3	4	5
H(x)	16	41	26	15	2	0

b) Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ dieser Häufigkeitsverteilung.

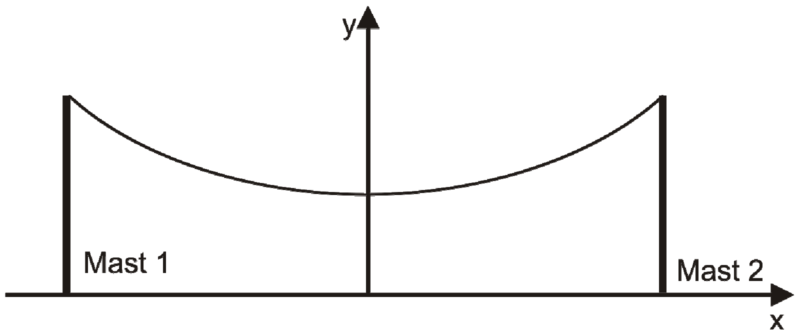
Die Zufallsgröße Y beschreibe die Anzahl beschädigter Kekse je Tüte.
Es sei p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Keks beim Abpacken mit dem neuen Verfahren beschädigt worden ist.
Als Näherung für den Erwartungswert der Zufallsgröße Y soll das arithmetische Mittel $\bar{x}$ angenommen werden.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

Die Großbäckerei hat eine neue Rezeptur für die Kekse entwickelt. Es soll untersucht werden, ob die Kekse nach neuer Rezeptur am Geschmack erkennbar sind. Dazu werden 100 Kunden, die die Kekse nach alter Rezeptur regelmäßig gegessen haben, gebeten, je einen Keks nach alter und neuer Rezeptur zu probieren und den Keks zu benennen, der nach neuer Rezeptur gebacken wurde.
Diese Untersuchung soll mithilfe eines rechtsseitigen Signifikanztests mit der Nullhypothese H_0: $p = 0{,}5$ und der Gegenhypothese H_1: $p > 0{,}5$ geführt werden, wobei p die Wahrscheinlichkeit für das richtige Benennen des Kekses nach neuer Rezeptur ist.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art für den Ablehnungsbereich $\bar{A} = \{59; 60; 61; \ldots; 100\}$.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.1**
Analysis

Bei der Planung von Überland-Elektroleitungen ist u. a. der Durchhang des Kabels zwischen zwei benachbarten Masten zu beachten. Der Durchhang ist die Höhendifferenz zwischen den Aufhängepunkten und dem tiefsten Punkt des Kabels über der Horizontalebene.
Die nicht maßstäbliche Abbildung zeigt diesen Sachverhalt.



Durch die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = 5(e^{0,03x} + e^{-0,03x})$, $x \in R$, kann die Höhe des Kabels über der Horizontalebene zwischen zwei benachbarten und gleich hohen Masten beschrieben werden, wobei eine Längeneinheit einem Meter entspricht.

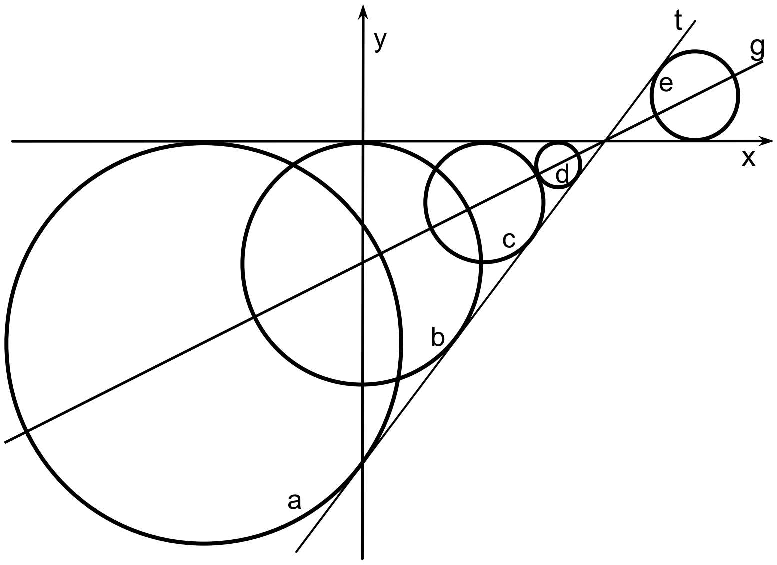
Weisen Sie nach, dass der Graph von f symmetrisch zur y-Achse ist und den Tiefpunkt T(0 | 10) hat.

Berechnen Sie den Durchhang des Kabels, wenn der Abstand der beiden Masten 100 m beträgt.

Der Mast 3 der Überland-Elektroleitung sei derjenige Mast, dessen Fußpunkt auf einer Geraden mit den Fußpunkten von Mast 1 und Mast 2 liegt und der 100 m von Mast 2 entfernt ist.
Zeigen Sie, dass die Höhe des Kabels zwischen Mast 2 und Mast 3 durch eine Funktion g mit der Gleichung $y = g(x) = 5(e^{0,03x-3} + e^{3-0,03x})$, $x \in R$, $50 \le x \le 150$, beschrieben werden kann.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.2**
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind Kreise gegeben. Sie berühren jeweils die x-Achse; ihre Mittelpunkte liegen auf der Geraden g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x - 2$.



a) Von einem Kreis k_1 ist die Gleichung gegeben: $x^2 + y^2 + 4y = 0$.
Von einem Kreis k_2 ist die Mittelpunktskoordinate $x_M = 2$ gegeben.
Ermitteln Sie von den Kreisen k_1 und k_2 jeweils die Koordinaten des Mittelpunktes und die Maßzahl des Radius.

Untersuchen Sie die Lage der Kreise k_1 und k_2 zueinander.

Zwei Kreise der Abbildung stellen die Kreise k_1 und k_2 dar.
Geben Sie an und begründen Sie, welche das sind.

b) Die x-Achse und die Gerade t sind gemeinsame Tangenten aller Kreise.
Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Tangente t die x-Achse schneidet.