Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan

Mathematik Gymnasium

„Quadratische Funktionen“

(Schuljahrgang 9)

(Arbeitsstand: 04.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

Aufgabe „Quadratische Funktionen“

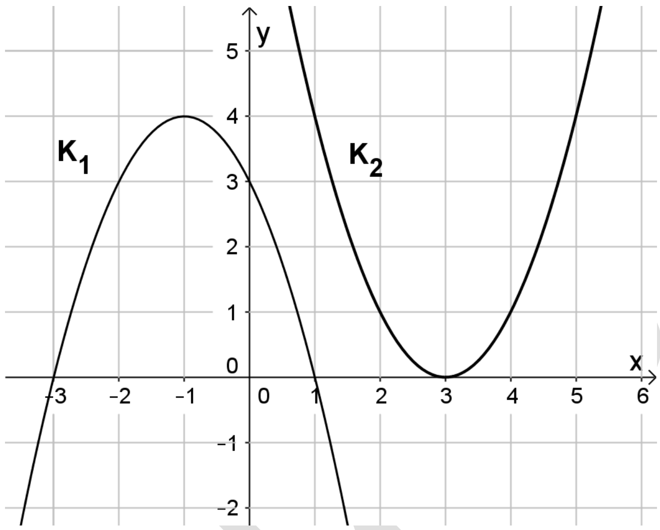
1a) Gegeben sind die Funktionen f, g und h mit $x \in \mathbb{R}$ und

$f(x) = (x+1)^2 - 4$, $\qquad g(x) = -x^2 - 2x + 4$, $\qquad h(x) = 2\,(x-1)^2 - \frac{1}{2}$.

Skizzieren Sie die Graphen der Funktionen f, g und h in ein und dasselbe Koordinatensystem.

1b) Die Abbildung zeigt die Graphen von zwei quadratischen Funktionen.

Bestimmen Sie jeweils eine zugehörige Funktionsgleichung.



Geben Sie folgende Eigenschaften des Graphen K_1 bzw. der dazugehörigen Funktion an:
Wertebereich, Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Monotonie.

1c) Ermitteln Sie jeweils eine Gleichung der nachfolgend beschriebenen Funktionen.

p: Der Graph einer quadratischen Funktion p sei eine Normalparabel, die für $x \leq -1$ monoton fallend verläuft und die y-Achse im Punkt Q(0 | 2) schneidet.

q: Der Wertebereich einer quadratischen Funktion q sei gegeben mit $W = \{y \mid y \in \mathbb{R} \text{ und } y \leq 2\}$. Der Graph der Funktion q sei eine Normalparabel, deren Symmetrieachse die Gleichung x = 3 hat.

1d) Betrachtet wird eine Funktion k mit den Parametern $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $k(x) = a(x+b)^2 + c$.
Beschreiben Sie jeweils Form und Lage des Graphen von k im Koordinatensystem bezüglich der Normalparabel für folgende Fälle.

(I) $\quad 0 < a < 1,\ b > 0,\ c < 0$

(II) $\quad a = -1,\ b = 0,\ c < 0$

Eine Funktion k habe genau zwei Nullstellen.
Geben Sie für diesen Fall alle möglichen Bedingungen für die Parameter a, b und c an und begründen Sie.

2. Der in Abbildung 1 abgebildete Graph beschreibe die Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen.

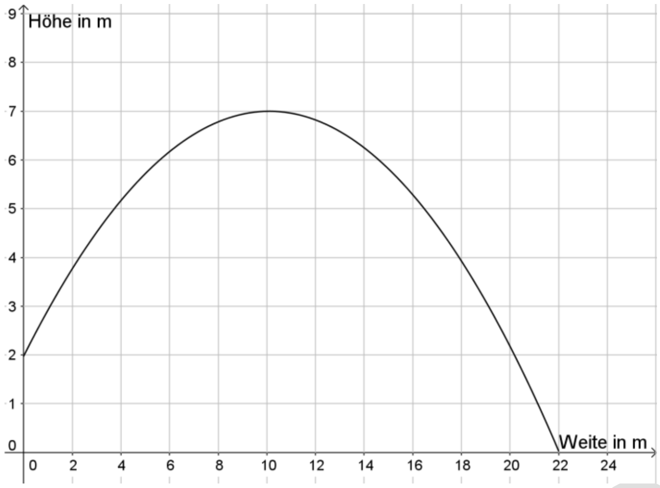


Abbildung 1

Interpretieren Sie drei charakteristische Eigenschaften des Graphen im Sachkontext.

3. In der Abbildung 2 ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg eines Motorrades durch eine Parabel beschrieben.

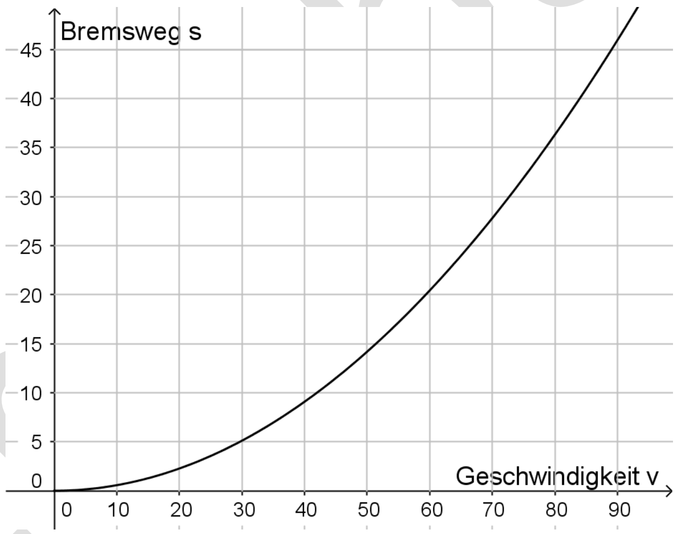


Abbildung 2

Weisen Sie nach, dass gilt: $\frac{s(2v)}{s(v)} = 4$

Formulieren Sie den durch diese Gleichung beschriebenen Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg in Worten.

4. Zum Bauen eines Drachens in Form eines Drachenvierecks benötigt man eine Holzleiste, aus der das „Grundkreuz“ des Drachens entsteht. Dieses wird dann mit Papier oder Folie bespannt.
Es steht eine 2 Meter lange Holzleiste zur Verfügung, die ohne Abfall verwendet werden soll.

a) Zeigen Sie, dass die Maßzahl des Flächeninhaltes jedes der Drachenvierecke mithilfe der Funktion A mit $A(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x$ berechnet werden kann.

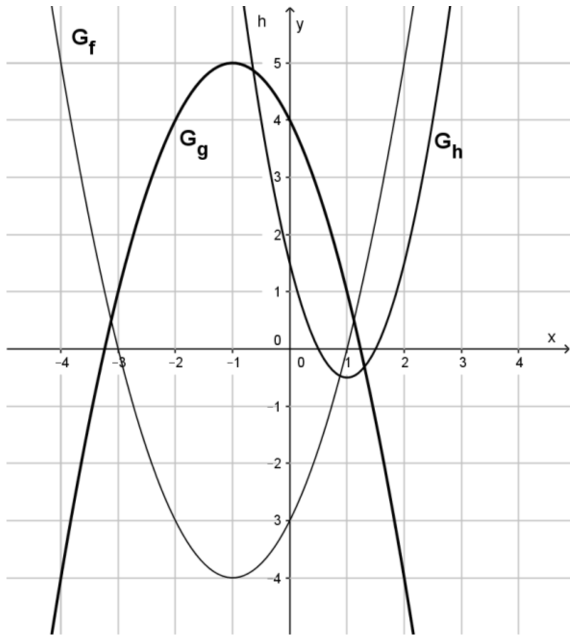
b) Geben Sie den im Sachbezug größtmöglichen Definitionsbereich dieser Funktion an.

c) Ermitteln Sie die Maßzahlen des Flächeninhaltes der Drachenvierecke bei einer Schrittweite $\Delta x = 0{,}05$ im Intervall 0,7 bis 1,4.

d) Berechnen Sie die Länge der Holzleistenteile derart, dass der Drachen eine Fläche von 40 Quadratdezimetern hat.

e) Geben Sie die maximal mögliche Fläche des Drachens an und begründen Sie.

Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
1a	Skizzieren, z. B.: 	2	2	
1b	Bestimmen, z. B.: K_1: $f_1(x) = -(x+1)^2 + 4$ K_2: $f_2(x) = (x-3)^2$ Angeben, z. B.: Wertebereich: $y \in R$, $y \leq 4$; Schnittpunkte mit der x-Achse: $S_1(-3 \mid 0)$; $S_2(1 \mid 0)$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid 3)$ achsensymmetrisch bez. $x = -1$ monoton wachsend für $x < -1$, monoton fallend für $x > -1$	2 4	 2	
1c	Ermitteln, z. B.: $p(x) = x^2 + 2x + 2$; $q(x) = -(x-3)^2 + 2$		3	3
1d	Beschreiben, z. B.: (I) in y-Richtung gestauchte Normalparabel, nach oben geöffnet, Scheitelpunkt im III. Quadranten (II) Normalparabel, nach unten geöffnet, Scheitelpunkt unterhalb der x-Achse und auf der y-Achse Angeben, z. B.: Für $a > 0$ gilt: b beliebig, $c < 0$ Für $a < 0$ gilt: b beliebig, $c > 0$		4	 3

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
2	Interpretieren, z. B.: $S_y(0\mid 2)$: Abstoßhöhe der Kugel 2 m $S(10\mid 7)$: maximale Flughöhe der Kugel 7m $S_x(22\mid 0)$: Stoßweite 22 m		3	
3	Nachweisen und Formulieren, z. B.: $s(v) = a \cdot v^2$; $s(2v) = 4a \cdot v^2$; $\frac{s(2v)}{s(v)} = 4$ Bei doppelter Geschwindigkeit ist der Bremsweg viermal so lang.		1	2

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
4a	Zeigen, z. B.: $A = \frac{1}{2} e \cdot f$ mit $e = x$ und $f = 2 - x$ $A(x) = \frac{1}{2} x \cdot (2 - x) = -\frac{1}{2} x^2 + x$			3
4b	Angeben, z. B.: Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < 2$		1	
4c	Ermitteln, z. B.:	1	1	

	A	B	C
1	x	A(x)	
2	0,70	0,455	
3	0,75	0,469	
4	0,80	0,480	
5	0,85	0,489	
6	0,90	0,495	
7	0,95	0,499	
8	1,00	0,500	
9	1,05	0,499	
10	1,10	0,495	
11	1,15	0,489	
12	1,20	0,480	
13	1,25	0,469	
14	1,30	0,455	
15	1,35	0,439	
16	1,40	0,420	

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
4d	Bestimmen, z. B.: $\frac{1}{2} x \cdot (2 - x) = 0{,}4$; $x_1 = 1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}55$; $x_2 = 1 + \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 1{,}45$ Länge der Holzleisten: 0,55 m und 1,45 m	1	2	
4e	Angeben und Begründen, z. B.: $A_{max} = 0{,}5\ m^2$ $A(1) = 0{,}5$ größter Funktionswert, Graph ist eine nach unten geöffnete Parabel, Funktionswerte symmetrisch zu x = 1	1	2	

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Diese Aufgabe dient der Überprüfung mathematischer Kompetenzen aus dem Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen". Im Unterschied zu den Lernaufgaben ist diese Aufgabe daher eher kleinschrittig aufgebaut und inhaltlich stark vorbestimmt. Exemplarisch illustriert diese Aufgabe durch ihre Anlage (Aufgaben 1 bis 3 ohne Hilfsmittel und Aufgabe 4 mit CAS) die Forderungen des Fachlehrplanes nach einer vom Hilfsmittel unabhängigen Entwicklung der ausgewiesenen Kompetenzen (vgl. Fachlehrplan Mathematik, S. 20). Dabei sollen die Aufgaben 1 bis 3 ohne digitale Hilfsmittel, ohne Tabellen und Formeln und auch ohne Schablonen bearbeitet werden. Zudem spiegeln die Anforderungen der Aufgabe den kumulativen Aufbau der Kompetenzschwerpunkte im Fachlehrplan. Beispielsweise erfordert eine erfolgreiche Bearbeitung der Teilaufgabe 1 Begriffsverständnis zu Begriffen, die in den grundlegenden Wissensbeständen des Kompetenzschwerpunktes „Lineare Funktionen" (Schuljahrgänge 7/8) ausgewiesen sind.

In den Hinweisen zur Lösung sind je Teilaufgabe Bewertungseinheiten in den Anforderungsbereichen angegeben, die eine Zensierung gemäß dem Leistungsbewertungserlass ermöglichen. Die Aufgabe eignet sich aber auch für eine bewertungsfreie, eigenständige Überprüfung mit Selbstkontrolle. Sie bietet ebenfalls die Möglichkeit zur Reaktivierung von Wissensbeständen im Kompetenzschwerpunkt „Funktionenklassen" des Schuljahrganges 10.

<u>Anmerkungen zum Einsatz digitaler Werkzeuge</u>

1. Die Kennzeichnung des Hilfsmittels mit „CAS" meint nicht „Computer-Algebra-Systeme" im engeren Sinne, sondern wird synonym für digitale Lernwerkzeuge, sogenannte Multi-Repräsentationssysteme, verwendet. Diese zeichnen sich durch die gleichzeitige Verfügbarkeit der unterschiedlichen Tools und damit durch die Möglichkeit der Vernetzung, z. B. durch graphische, numerische und algebraische Darstellungsweisen, aus.
2. Die durch die Schülerinnen und Schüler zu entwickelnden Lösungen sind grundsätzlich unabhängig vom verwendeten Hilfsmittel (Taschenrechner, CAS, herkömmliche Tabellen, etc.) mathematisch korrekt und nachvollziehbar darzustellen.

Aufgabe „Quadratische Funktionen“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgang
Lernerfolgskontrolle	Aufgaben 1-3: keine	60 min	9
	Aufgabe 4: CAS	30 min	

Einordnung in den Fachlehrplan

Kompetenzschwerpunkt

Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen

zu entwickelnde mathematische Kompetenzen

- quadratische Gleichungen bzw. quadratische Funktionen identifizieren
- Scheitelpunktkoordinaten von Graphen quadratischer Funktionen aus Funktionsgleichungen ermitteln und quadratische Funktionen graphisch darstellen
- Argumente, insbesondere Nullstellen, und Funktionswerte quadratischer Funktionen graphisch ermitteln und berechnen
- Eigenschaften quadratischer Funktionen ermitteln und beschreiben
- Einfluss von Parametern auf Lage und Form der Graphen quadratischer Funktionen untersuchen und beschreiben
- aus der Funktionsgleichung eine Vorstellung vom Graphen gewinnen
- inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben mithilfe quadratischer Gleichungen bzw. quadratischer Funktionen lösen

Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen

- quadratische Funktion, Parabel, Normalparabel, Streckung, Stauchung
- Funktionsgleichungen des Typs:
  $y = f(x) = x^2 + px + q$, $y = f(x) = (x + d)^2 + e$, $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
- Eigenschaften quadratischer Funktionen und ihrer Graphen (auch: Symmetrieverhalten, Scheitelpunkt als Hoch- oder Tiefpunkt)

Einordnung in das Kompetenzmodell

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
1a	x		x					2, 3	2	2	
1b			x					2	6	2	
1c	x		x		1	2		3		3	3
1d	x		x			3	6	3		4	3
2	x		x			4		2		3	
3	x		x		1	1, 4	5	2		1	2
4a	x	x	x		1	1, 2	5				3
4b	x		x		1	1, 2		3		1	
4c	x		x		6				1	1	
4d	x		x		3				1	2	
4e			x			3	4		1	2	