# Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan

# Mathematik Gymnasium

## „Prisma“

(Schuljahrgang 10)

(Arbeitsstand: 04.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

| | |
|---|---|
| Petra Behling | Halle (Leitung der Fachgruppe) |
| Thomas Brill | Schulpforte |
| Uta Fliegner-Hoppstock | Osterburg |
| Antje Noack | Halberstadt |
| Udo Piper | Wittenberg |

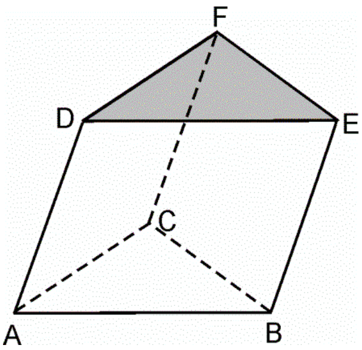

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

## Aufgabe: „Prisma“

In einem kartesischen Koordinatensystem ist durch die Punkte A, B, C, D, E und F ein dreiseitiges Prisma gegeben, wobei das Dreieck ABC die Grundfläche bildet.

Die Koordinaten der Eckpunkte sind:
$A(1|4|0)$, $B(7|-6|4)$, $C(3|-2|-4)$, $D(-5|-4|2)$

Die nebenstehende Abbildung des Prismas ist nicht maßstäblich.




a) Geben Sie die spezielle Lage des Punktes A bezüglich der Koordinatenebenen und Koordinatenachsen im kartesischen Koordinatensystem an.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes E.

Weisen Sie nach, dass $\gamma = \sphericalangle ACB$ ein rechter Winkel ist und berechnen Sie sowohl die Gradmaße der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks ABC als auch die Maßzahlen des Umfangs und des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und charakterisieren Sie dessen Lage bezüglich der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$.

Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt: $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$.

Schlussfolgern Sie daraus und mithilfe der Beziehung $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\sphericalangle(\vec{a}; \vec{b}))$ auf die lineare Abhängigkeit oder Unabhängigkeit der Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$.

c) Der Punkt $L(3|0|0)$ ist der Fußpunkt des Lotes von D in die Grundfläche ABC des Prismas. Begründen Sie, dass das Prisma ein schiefes Prisma ist und berechnen Sie die Maßzahl des Volumens des Prismas.

d) Der Grundriss des Prismas ABCDEF soll in einer senkrechten Zweitafelprojektion dargestellt werden. Die Grundrissebene soll die Ebene sein, in der die Grundfläche ABC des Prismas liegt. Es ist bekannt, dass für den Ortsvektor des Punktes L die Linearkombination $\overrightarrow{OL} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ gilt. In genau einer der drei nicht-maßstäblichen Abbildungen ist der Grundriss des Prismas zutreffend dargestellt.

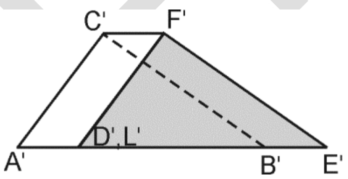



Abbildung 1

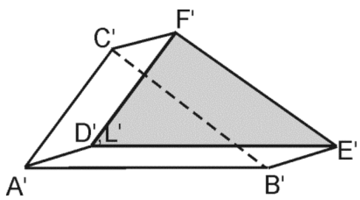



Abbildung 2

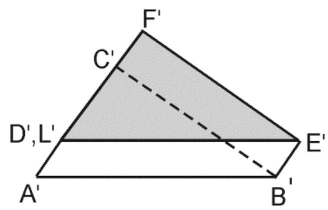



Abbildung 3

Untersuchen Sie unter Bezugnahme der Lage des Punktes L, welche der Abbildungen den Grundriss zutreffend darstellt.

e) Es existieren genau zwei gerade dreiseitige Prismen $ABCD_1E_1F_1$ sowie $ABCD_2E_2F_2$ mit derselben Grundfläche ABC sowie dem gleichen Volumen wie das Prisma ABCDEF. Ermitteln Sie für diese geraden Prismen die Koordinaten der Punkte $D_1$ und $D_2$.

## Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

| Aufg. | Hinweise zur Lösung | AFB I | AFB II | AFB III |
|---|---|---|---|---|
| a | Angeben, z. B.:<br>A liegt in der xy–Ebene des Koordinatensystems, aber auf keiner der Koordinatenachsen | 2 | | |
| | Ermitteln. z. B.:<br>$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}$ ; $E(1 \mid -14 \mid 6)$ | 1 | | |
| | Nachweisen, z. B.:<br>$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$ ; $\gamma = 90°$ | 1 | | |
| | Berechnen, z. B.:<br>$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{\lvert \overrightarrow{BA} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{BC} \rvert}$ ; $\beta \approx 37{,}4°$<br>$\alpha = 180° - (\beta - \gamma) \approx 52{,}6°$ | 1 | 3 | |
| | Maßzahl des Umfangs: $\lvert \overrightarrow{AB} \rvert + \lvert \overrightarrow{BC} \rvert + \lvert \overrightarrow{CA} \rvert \approx 29{,}6$<br>Maßzahl der Fläche: $\frac{1}{2} \cdot \lvert \overrightarrow{CA} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{CB} \rvert = 8\sqrt{21} \approx 36{,}7$ | 3 | | |
| b | Berechnen und Charakterisieren, z. B.:<br>$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 64 \\ 32 \\ -16 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$<br>$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{AB} \wedge (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \perp \overrightarrow{AC}$ | | 2 | |
| | Zeigen, z. B.:<br>$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = -672 \neq 0$ | 2 | | |
| | Schlussfolgern, z. B.:<br>(1) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} \neq 0$<br>(2) $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \lvert \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{AD} \rvert \cdot \cos\angle(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ gilt:<br>Aus (1) und (2) folgt: $\cos\sphericalangle(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \neq 0$ und damit ist Winkel $(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) \neq 90°$. Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ liegen deshalb nicht in einer gemeinsamen Ebene und sind mithin linear unabhängig. | | | 5 |

| Aufg. | Hinweise zur Lösung | AFB I | AFB II | AFB III |
|---|---|---|---|---|
| c | Begründen, z. B.:<br>Wäre das Prisma gerade, müsste der Punkt $L$ mit dem Punkt $A$ "zusammenfallen". Da $L \neq A$, ist das Prisma nicht gerade, sondern schief.<br><br>Berechnen, z. B.:<br>Maßzahl des Volumens: $\frac{1}{2} \cdot \lvert \overrightarrow{CA} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{CB} \rvert \cdot \lvert \overrightarrow{DL} \rvert = 336$ | | 2<br><br>2 | |
| d | Untersuchen, z. B.:<br>Allein Abbildung 2 kommt in Frage.<br>Würden Abbildung 1 oder Abbildung 3 zutreffend sein, müsste in der Linearkombination des Ortsvektors von L jeweils ein Koeffizient gleich Null sein, weil hier lediglich in Richtung eines der beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ verschoben wurde. Lediglich in Abbildung 2 liegt der Fußpunkt des Lotes von D in die Grundfläche im Inneren dieser, was durch die Linearkombination vorgegeben ist. | | | 3 |
| e | Ermitteln, z. B.:<br>$\overrightarrow{OD}_{1/2} = \overrightarrow{OA} \pm \overrightarrow{DL}$ ; $D_1(9 \mid 8 \mid -2)$, $D_2(-7 \mid 0 \mid 2)$ | | 3 | |
| | | 10 | 12 | 8 |

## Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Der Kompetenzschwerpunkt "Vektoren" schafft Voraussetzungen für den Übergang zur analytischen Geometrie, die in der Qualifikationsphase mit der Untersuchung von Geraden, Kreisen und Ebenen ihre Fortsetzung findet. Die Aufgabe dient der Überprüfung vielfältiger Kompetenzen im Umgang mit Vektoren als Pfeilklassen. Diese Überprüfung muss nicht notwendigerweise mit einer Bewertung einhergehen, den Lernenden wie auch den Lehrkräften soll Rückmeldung über die Verfügbarkeit der geforderten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen gegeben werden. Aus den Ergebnissen können alle Beteiligten aus ggf. gehäuft auftretenden Defiziten Rückschlüsse auf Lernschwierigkeiten ziehen und Konsequenzen für die weitere Arbeit ableiten. Insofern ist eine Verwendung der Aufgabe nach eingehender Reaktivierung auch zur Sicherung des Ausgangsniveaus unmittelbar vor der Behandlung der Kompetenzschwerpunkte „Geraden und Ebenen" sowie "Kreise" in der Qualifikationsphase denkbar.

**Aufgabe „Prisma“**

| Art der Aufgabe | Hilfsmittel | Arbeitszeit | Schuljahrgang |
|---|---|---|---|
| Klausuraufgabe | WTR | 60 min | 10 |

**Einordnung in den Lehrplan**

<u>Kompetenzschwerpunkte</u>
Vektoren

<u>zu entwickelnde mathematische Kompetenzen</u>

- einfache geometrische Objekte in einem Koordinatensystem darstellen
- Beträge von Vektoren berechnen
- Rechenoperationen mit Vektoren ausführen
- Vektoren auf lineare Abhängigkeit oder lineare Unabhängigkeit untersuchen
- Skalarprodukt von Vektoren berechnen und geometrisch deuten
- Vektoren auf Orthogonalität untersuchen und das Gradmaß des Winkels zwischen Vektoren berechnen
- Vektorprodukt zur Ermittlung von Normalenvektoren nutzen
- inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben lösen

<u>Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen</u>

- räumliches kartesisches Koordinatensystem
- Vektor und Koordinaten von Vektoren
- Betrag eines Vektors
- Vektoraddition, Linearkombination
- linear abhängig, linear unabhängig
- Skalarprodukt, Vektorprodukt
- Winkel zwischen Vektoren, Orthogonalität

**Einordnung in das Kompetenzmodell**

| Aufg. | inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen | | | | allgemeine mathematische Kompetenzen | | | | AFB | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $a^2=5m^2$ | | | | P | M | A | D | I | II | III |
| a | x | x | | | 3 | | | 1 | 8 | 3 | |
| b | | x | | | 3 | | 6 | | 2 | 2 | 5 |
| c | x | x | | | | 3 | | 3 | | 4 | |
| d | | x | | | 1 | | 4 | 1, 4 | | | 3 |
| e | | x | | | 3 | | | | | 3 | |