

Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan Mathematik Gymnasium

„Kreisverkehr“ (Schuljahrgänge 7/8)

(Arbeitsstand: 04.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle



Die vorliegende Publikation, mit Ausnahme der Quellen Dritter, ist unter der „Creative Commons“-Lizenz veröffentlicht.

 CC BY-SA 3.0 DE

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

Sie dürfen das Material weiterverbreiten, bearbeiten, verändern und erweitern. Wenn Sie das Material oder Teile davon veröffentlichen, müssen Sie den Urheber nennen und kennzeichnen, welche Veränderungen Sie vorgenommen haben. Sie müssen das Material und Veränderungen unter den gleichen Lizenzbedingungen weitergeben.

Die Rechte für Fotos, Abbildungen und Zitate für Quellen Dritter bleiben bei den jeweiligen Rechteinhabern, diese Angaben können Sie den Quellen entnehmen. Der Herausgeber hat sich intensiv bemüht, alle Inhaber von Rechten zu benennen. Falls Sie uns weitere Urheber und Rechteinhaber benennen können, würden wir uns über Ihren Hinweis freuen.

Aufgabe „Kreisverkehr“

In einem Wohngebiet kommt es im Kreuzungsbereich der jeweils geradlinig verlaufenden Rosen- und Tulpenstraße bei erhöhtem Verkehrsaufkommen häufig zum Stau. Um die damit verbundene Belästigung durch Lärm und Abgase zu vermindern, ist der Bau eines Kreisverkehrs geplant. Der Verlauf der Rosenstraße wird in einem Koordinatensystem (eine Längeneinheit entspricht 1 m) durch die Punkte $A(9 | 8)$ und $B(11 | 10)$ und der der Tulpenstraße durch die Punkte $C(1 | 12)$ und $D(3 | 8)$ beschrieben. Um eine gute Befahrbarkeit sowie die Sicherheit der Radfahrer zu gewährleisten, wählt man bei einem Außenradius des Kreisverkehrs von 15 Metern als Fahrbahnbreite 8 Meter. Der Kreuzungsmittelpunkt ist gleichzeitig der Mittelpunkt des entstehenden Kreisverkehrs.

- a) Stelle die geometrischen Objekte, die die Straßen und den Kreisverkehr beschreiben, in einem Koordinatensystem graphisch dar.

Ergänze folgende Tabelle.

reales Objekt	mathematisches Modell	Beschreibung
Tulpenstraße	Gerade	
		$y = x - 1$
Kreuzungsmittelpunkt		
		Fläche, die von zwei konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt $M(5 4)$ und den Radien $r_i = 7 \text{ m}$ und $r_a = 15 \text{ m}$ begrenzt wird.

Interpretiere die Lage eines Punktes, der durch den Schnitt des Außenkreises mit einer dieser Geraden entsteht, in Bezug zum realen Sachverhalt.

- b) Die Fahrbahn des Kreisverkehrs wird mit Bitumen überzogen. Um die erforderliche Bitumenmenge zu bestimmen, wird zunächst die Größe der zu überziehenden Fläche ermittelt.

Begründe, dass sich der Flächeninhalt der Fahrbahn des Kreisverkehrs mit dem Außenradius r_a und dem Innenradius r_i nach folgender Formel berechnen lässt:

$$A = \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2).$$

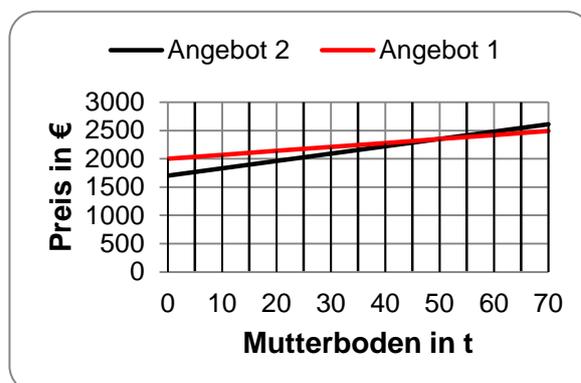
Berechne den Flächeninhalt.

- c) Die Kreisinsel soll bepflanzt werden. Für ein gutes Pflanzenwachstum ist auf dieser Fläche das Aufschütten von mindestens 31 Kubikmeter Mutterboden erforderlich. Werden mehr als 54 Kubikmeter Mutterboden aufgeschüttet, so führt das nicht mehr zu einem spürbar besseren Pflanzenwachstum. Die Bestellung des Mutterbodens erfolgt in Tonnen. Ein Kubikmeter Mutterboden wiegt durchschnittlich 1,3 Tonnen. Es werden die Angebote verschiedener Firmen verglichen. Jedes Angebot setzt sich aus einem Grundpreis und dem Preis für den aufgeschütteten Mutterboden zusammen.

Das Diagramm veranschaulicht den Gesamtpreis in Abhängigkeit vom aufgeschütteten Mutterboden.

Hinweis:

In der Anlage ist das Diagramm vergrößert dargestellt.



Interpretiere das Diagramm.

Formuliere eine Entscheidungsempfehlung für den Stadtrat bezüglich der Wahl der Firma, die den Auftrag erhalten sollte und begründe diese.

Ermittle für beide Angebote den Preis für 1 Tonne Mutterboden mithilfe des Diagramms.

Berechne die minimale und die maximale Höhe der Kreisinsel, wenn minimal 31 Kubikmeter bzw. maximal 54 Kubikmeter Mutterboden aufgeschüttet werden.

- d) Der Außenradius eines Kreisverkehrs beträgt innerhalb von Wohngebieten mindestens 7 m und höchstens 24 m. Der Außenkreis wird abschließend vollständig mit Pflastersteinen begrenzt. Diese haben eine quadratische Grundfläche und eine Breite von 35 cm.

Ermittle für mindestens fünf Radien des vorgegebenen Intervalls den Umfang des Außenkreises sowie eine graphische Darstellung dieser Zuordnung.

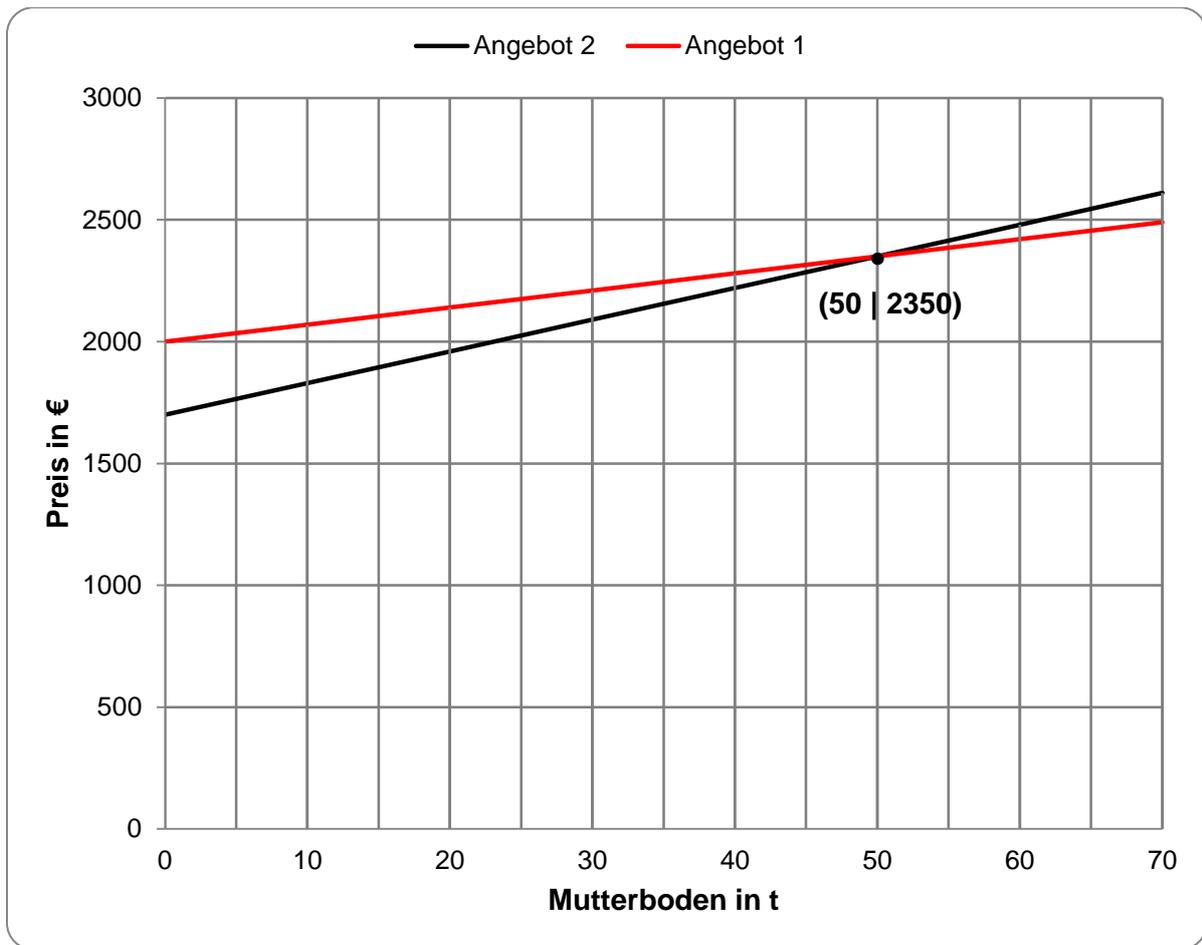
Begründe, dass der Umfang eines Kreises in Abhängigkeit von seinem Radius durch einen funktionalen Zusammenhang mit der Gleichung $y = mx + n$ und durch eine Proportionalität dargestellt werden kann.

Gib die Werte für m und n im Sachzusammenhang sowie die Bedeutung von x und y an.

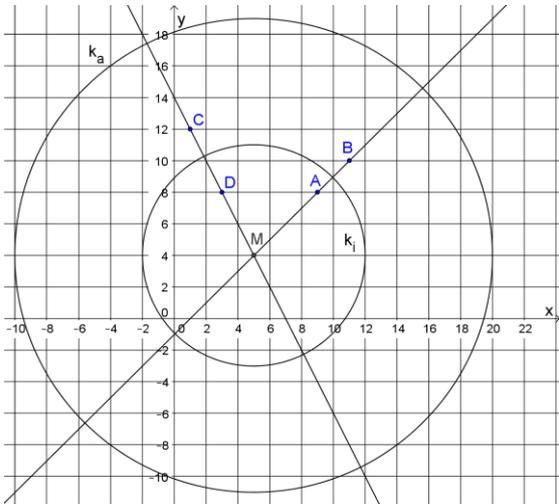
Leite aus dem Wertebereich der Zuordnung eine Schlussfolgerung in Bezug zum realen Sachverhalt ab, die für die Planung von Bedeutung ist.

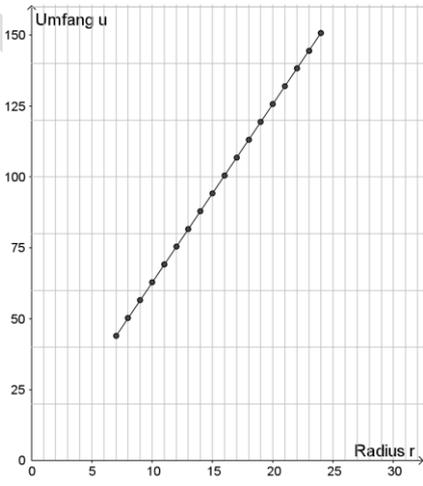
- e) Weise nach, dass bei einer 8 m breiten Fahrbahn ($r_a > 8$) deren Flächeninhaltsmaßzahl mithilfe der Formel $A = 16\pi \cdot (r_a - 4)$ berechnet werden kann.

Anlage: Diagramm



Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III															
a	<p>Darstellen, z. B.:</p>  <p>Ergänzen, z. B.:</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>reales Objekt</th> <th>mathematisches Modell</th> <th>Beschreibung</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Tulpenstraße</td> <td>Gerade</td> <td>$y = -2x + 14$</td> </tr> <tr> <td>Rosenstraße</td> <td>Gerade</td> <td>$y = x - 1$</td> </tr> <tr> <td>Kreuzungsmittelpunkt</td> <td>Schnittpunkt der Geraden</td> <td>M(5 4)</td> </tr> <tr> <td>Fahrbahn des Kreisverkehrs</td> <td>Fläche des Kreisringes</td> <td>Fläche, die von zwei konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt M(5 4) und den Radien $r_a = 15$ m und $r_i = 7$ m begrenzt wird.</td> </tr> </tbody> </table> <p>Interpretieren, z. B.:</p> <p>Die Lage eines Schnittpunktes einer Geraden mit dem Außenkreis beschreibt den Ort des Übergangs von der geradlinigen Fahrbahn, betrachtet von der Fahrbahnmitte, zur kreisförmigen Fahrbahn.</p>	reales Objekt	mathematisches Modell	Beschreibung	Tulpenstraße	Gerade	$y = -2x + 14$	Rosenstraße	Gerade	$y = x - 1$	Kreuzungsmittelpunkt	Schnittpunkt der Geraden	M(5 4)	Fahrbahn des Kreisverkehrs	Fläche des Kreisringes	Fläche, die von zwei konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt M(5 4) und den Radien $r_a = 15$ m und $r_i = 7$ m begrenzt wird.	x	x	
reales Objekt	mathematisches Modell	Beschreibung																	
Tulpenstraße	Gerade	$y = -2x + 14$																	
Rosenstraße	Gerade	$y = x - 1$																	
Kreuzungsmittelpunkt	Schnittpunkt der Geraden	M(5 4)																	
Fahrbahn des Kreisverkehrs	Fläche des Kreisringes	Fläche, die von zwei konzentrischen Kreisen mit dem Mittelpunkt M(5 4) und den Radien $r_a = 15$ m und $r_i = 7$ m begrenzt wird.																	
b	<p>Begründen, z. B.:</p> <p>Die Form der Fahrbahn kann als Kreisring aufgefasst werden.</p> <p>Flächeninhalt des Außenkreises: $A_a = \pi \cdot r_a^2$</p> <p>Flächeninhalt des Innenkreises: $A_i = \pi \cdot r_i^2$</p> <p>Flächeninhalt der Fahrbahn: $A = A_a - A_i$</p> $A = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$ $A = \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)$ <p>Berechnen, z. B.:</p> <p>$r_a = 15$ m; $r_i = 7$ m; $A \approx 553$ m²</p>	x	x																

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III																																																																					
c	<p>Interpretieren, z. B.:</p> <p>Angebot 1: Grundpreis beträgt 2000 € Angebot 2: Grundpreis beträgt 1700 €</p> <p>Der Anstieg der Geraden, die das Angebot 1 charakterisiert, ist geringer und demnach ist auch der Preis des Angebotes 1 für eine Tonne Mutterboden geringer.</p> <p>Der Schnittpunkt der Geraden gibt an, bei welcher Masse Mutterboden die Angebote identisch sind.</p> <p>Beim Einbau von 50 t Mutterboden sind die Preise identisch, bei weniger Mutterboden ist das Angebot 2 günstiger und bei mehr Mutterboden das Angebot 1.</p> <p>Formulieren, z. B.:</p> <p>Der Stadtrat sollte sich für die Firma 2 entscheiden, wenn weniger als 50 t Mutterboden eingebaut werden und bei mehr als 50 t Mutterbodeneinbau sollte die Firma 1 den Zuschlag erhalten. Da für 50 t Mutterboden der Preis identisch ist, können andere Faktoren zur Entscheidung herangezogen werden.</p> <p>Ermitteln, z. B.:</p> <p>Angebot 1: $2350 \text{ €} - 2000 \text{ €} = 350 \text{ €} \Rightarrow 1 \text{ t Mutterboden kostet } 7 \text{ €}.$</p> <p>Angebot 2: $2350 \text{ €} - 1700 \text{ €} = 650 \text{ €} \Rightarrow 1 \text{ t Mutterboden kostet } 13 \text{ €}.$</p> <p>Berechnen, z. B.:</p> <p>mathematisches Modell: Kreiszylinder mit $r = 7 \text{ m}$ und $V_{\min} = 31 \text{ m}^3$ und $V_{\max} = 54 \text{ m}^3$</p> $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}; h_{\min} \approx 0,20 \text{ m}; h_{\max} \approx 0,35 \text{ m}$		<p>x</p> <p>x</p> <p>x</p>	<p>x</p>																																																																					
d	<p>Ermitteln und Darstellen, z. B.:</p> <table border="1" data-bbox="375 1279 598 1765"> <thead> <tr> <th colspan="3">Tabelle</th> </tr> <tr> <th>A</th> <th>B</th> <th>C</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>Radius r</td> <td>Umfang u</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>7</td> <td>43.98</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>8</td> <td>50.27</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>9</td> <td>56.55</td> </tr> <tr> <td>6</td> <td>10</td> <td>62.83</td> </tr> <tr> <td>7</td> <td>11</td> <td>69.12</td> </tr> <tr> <td>8</td> <td>12</td> <td>75.4</td> </tr> <tr> <td>9</td> <td>13</td> <td>81.68</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>14</td> <td>87.96</td> </tr> <tr> <td>11</td> <td>15</td> <td>94.25</td> </tr> <tr> <td>12</td> <td>16</td> <td>100.53</td> </tr> <tr> <td>13</td> <td>17</td> <td>106.81</td> </tr> <tr> <td>14</td> <td>18</td> <td>113.1</td> </tr> <tr> <td>15</td> <td>19</td> <td>119.38</td> </tr> <tr> <td>16</td> <td>20</td> <td>125.66</td> </tr> <tr> <td>17</td> <td>21</td> <td>131.95</td> </tr> <tr> <td>18</td> <td>22</td> <td>138.23</td> </tr> <tr> <td>19</td> <td>23</td> <td>144.51</td> </tr> <tr> <td>20</td> <td>24</td> <td>150.8</td> </tr> <tr> <td>21</td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>  <p>Begründen, z. B.:</p> <p>Der Umfang u ist direkt proportional zum Radius r, denn $\frac{u}{r} = 2\pi$.</p> <p>Bei einer graphischen Darstellung des Zusammenhangs liegen die Wertepaare auf einer Geraden durch den Koordinatenursprung.</p>	Tabelle			A	B	C	1			2	Radius r	Umfang u	3	7	43.98	4	8	50.27	5	9	56.55	6	10	62.83	7	11	69.12	8	12	75.4	9	13	81.68	10	14	87.96	11	15	94.25	12	16	100.53	13	17	106.81	14	18	113.1	15	19	119.38	16	20	125.66	17	21	131.95	18	22	138.23	19	23	144.51	20	24	150.8	21				<p>x</p> <p>x</p>	
Tabelle																																																																									
A	B	C																																																																							
1																																																																									
2	Radius r	Umfang u																																																																							
3	7	43.98																																																																							
4	8	50.27																																																																							
5	9	56.55																																																																							
6	10	62.83																																																																							
7	11	69.12																																																																							
8	12	75.4																																																																							
9	13	81.68																																																																							
10	14	87.96																																																																							
11	15	94.25																																																																							
12	16	100.53																																																																							
13	17	106.81																																																																							
14	18	113.1																																																																							
15	19	119.38																																																																							
16	20	125.66																																																																							
17	21	131.95																																																																							
18	22	138.23																																																																							
19	23	144.51																																																																							
20	24	150.8																																																																							
21																																																																									

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
	<p>Angeben, z. B.:</p> $n = 0$; $m = 2\pi$ x entspricht r und y entspricht u <p>Ableiten, z. B.:</p> <p>Aus $u_{\min} \approx 44$ und $u_{\max} \approx 160$ folgt für den Wertebereich der Zuordnung: $44 \leq u \leq 160$. Bei der Planung muss berücksichtigt werden, dass man in Abhängigkeit vom gewählten Radius für mindestens 44 m und höchstens 160 m Pflastersteine einkalkuliert.</p>	x	x	
e	<p>Nachweisen, z. B.:</p> $A = \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2); \quad r_i = r_a - 8$ $A = \pi \cdot (r_a^2 - (r_a - 8)^2)$ $A = \pi \cdot (16r_a - 64)$ $A = 16\pi \cdot (r_a - 4)$			x

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Da zum erfolgreichen Lösen der Aufgabe ein anwendungsbereites Grundwissen aus unterschiedlichen Kompetenzschwerpunkten der Schuljahrgänge 7 und 8 erforderlich ist, empfiehlt sich ein Einsatz im zweiten Halbjahr des Schuljahrganges 8.

Diese komplexe Aufgabe ist so angelegt, dass die Aufträge unabhängig voneinander bearbeitet werden können. Dadurch besteht bei einer heterogenen Lerngruppe bezüglich des Leistungsvermögens auch die Möglichkeit des differenzierten Arbeitens. Für eine Weiterentwicklung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen zum Begründen, Entscheiden und Interpretieren eignen sich Partner- und Gruppenarbeit. Das Anfertigen einer graphischen Darstellung zur Veranschaulichung des außermathematischen Sachverhaltes ist eine Hilfe, um Strukturen und Beziehungen in geeignete mathematische Modelle zu überführen und diese zu beschreiben. Erfahrungsgemäß bereitet den Schülerinnen und Schülern das Begründen von Sachverhalten und das Herleiten von Formeln Schwierigkeiten, sodass dafür ein erhöhter Übungsbedarf besteht. Durch die Teilaufgaben b) und e) wird eine sukzessive Steigerung des kognitiven Anspruchs realisiert.

Beim Interpretieren des Diagramms ist eine zusammenhängende verbale Darstellung gefordert. Dafür ist das Erkennen von Eigenschaften der Graphen zum Ableiten von Aussagen im außermathematischen Sachverhalt von Bedeutung. Weiterhin leistet die Teilaufgabe zur Ermittlung der aufzuschüttenden Höhe Mutterboden einen Beitrag zur Weiterentwicklung der Problemlösefähigkeit. Die Schülerinnen und Schüler müssen den Aufgabentext analysieren, um erforderliche Informationen zu erschließen und für einen zielführenden Lösungsansatz den Übergang von der Zweidimensionalität zur Dreidimensionalität erkennen.

Die Teilaufgabe d) initiiert das Vernetzen von Wissen, welches in unterschiedlichen Kompetenzschwerpunkten erworben wurde. Das Übertragen des Zusammenhangs zwischen Radius und Umfang eines Kreises auf einen allgemeinen linearen funktionalen Zusammenhang führt zur Weiterentwicklung des Abstraktionsvermögens.

Variationsmöglichkeiten

Um das Stadtbild zu verschönern, ist eine Bepflanzung der Kreisinsel geplant. Für ein gutes Pflanzenwachstum ist das Aufschütten von Mutterboden auf einer Höhe von mindestens 20 cm, aber höchstens 35 cm erforderlich. Zur Bestellung des Bodens ist eine Angabe in Tonnen notwendig. Ein Kubikmeter Mutterboden wiegt durchschnittlich 1,3 t.

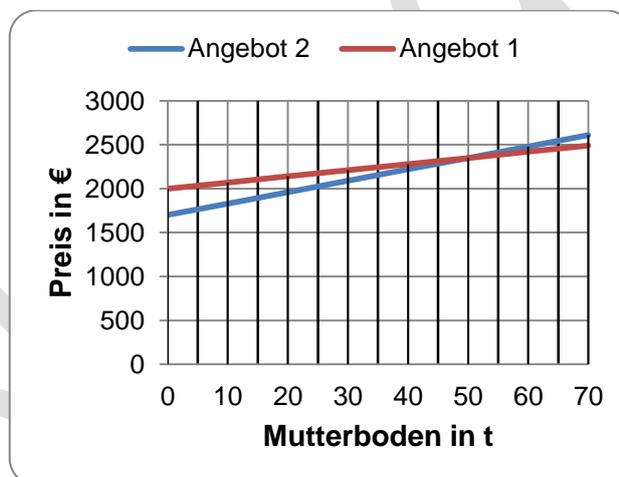
Es werden die Angebote verschiedener Firmen für die Lieferung von Mutterboden einschließlich der Bepflanzung verglichen.

Angebot 1:

Grundpreis für die Bepflanzung: 2000 €

Angebot 2:

Grundpreis für die Bepflanzung: 1700 €



- Berechne die erforderliche Mindestmenge sowie die maximal notwendige Menge an Mutterboden in Tonnen.
- Ermittle für beide Angebote den Preis für 1 Tonne Mutterboden.
- Beurteile die Entscheidung des Stadtrates: „Die Firma mit dem Angebot 2 bekommt den Auftrag, denn es ist in jedem Fall günstiger.“

Kommentiere die Herleitung der Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes der Fahrbahn des Kreisverkehrs mit dem Außenradius r_a , dem Innenradius r_i und der Fahrbahnbreite b mit $b > r_a$.

$$A = \pi \cdot r_a^2 - \pi \cdot r_i^2$$

$$A = \pi \cdot (r_a^2 - r_i^2)$$

$$A = \pi \cdot (r_a^2 - (r_a - b)^2)$$

$$A = \pi \cdot (r_a^2 - (r_a^2 - 2r_a b + b^2))$$

$$A = \pi \cdot (r_a^2 - r_a^2 + 2r_a b - b^2)$$

$$A = \pi \cdot (2r_a b - b^2)$$

$$A = \pi \cdot b \cdot (2r_a - b)$$

Aufgabe „Kreisverkehr“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgänge
Lernaufgabe	CAS	90 min	7/8

Einordnung in den Fachlehrplan

<p><u>Kompetenzschwerpunkte</u> Lineare Funktionen Kreise Arbeiten mit Variablen Körperberechnung</p>
<p><u>zu entwickelnde mathematische Kompetenzen</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – Zusammenhänge in der Mathematik und im Alltag als Funktionen identifizieren – Funktionen mithilfe verschiedener Darstellungsformen beschreiben – funktionale Zusammenhänge, die durch lineare Funktionen modelliert werden können, identifizieren – lineare Funktionen graphisch darstellen – Gleichung für lineare Funktionen ermitteln – Koordinaten von Schnittpunkten von Graphen linearer Funktionen ermitteln – Kreise zeichnen und bezeichnen – Umfang und Flächeninhalt von Kreisen berechnen – Terme mit Variablen auch unter Nutzung binomischer Formeln umformen – Variable für das Formulieren von mathematischen Beziehungen sowie für das Beweisen von Aussagen nutzen – Bestimmungsstücke von Prismen aus gegebenem Volumen berechnen
<p><u>Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen</u></p> <ul style="list-style-type: none"> – Darstellungsformen: Graph, Gleichung, Wertetabelle, Menge geordneter Zahlenpaare – lineare Funktion, $y = f(x) = mx + n$, Anstieg m, absolutes Glied n – Eigenschaft: Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen – Begriff Radius – Formeln für Umfang und Flächeninhalt eines Kreises – Termumformungen: Zusammenfassen, Ausmultiplizieren und Ausklammern – binomische Formeln – Formeln für Volumen von Prismen

Einordnung in das Kompetenzmodell

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
a		x	x		1	1,2		2,5	x	x	
b	x	x					3	3	x	x	
c	x	x	x		1			2,4		x	x
d		x	x			1,3		2		x	
e		x			2			3,4			x