Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan Mathematik Gymnasium

„Kreistagswahl“

(Schuljahrgänge 11/12)

(Arbeitsstand: 07.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

Aufgabe „Kreistagswahl“

1. Bei einer Kreistagswahl in Sachsen-Anhalt betrug die Wahlbeteiligung in einem Landkreis 44,9 %. Betrachtet werden im Folgenden nur wahlberechtigte Personen dieses Landkreises.

   Die Zufallsgröße X_n beschreibe in einer Stichprobe vom Umfang n jeweils die Anzahl der Personen, die sich an dieser Kreistagswahl beteiligt haben.

a) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X_n als binomialverteilt angesehen werden kann.

b) Geben Sie ein Ereignis im Sachzusammenhang an, dessen Wahrscheinlichkeit sich durch den Term $\sum_{k=0}^{25}\binom{50}{k}\cdot 0{,}449^{k}\cdot 0{,}551^{50-k}$ berechnen lässt.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich von 100 zufällig ausgewählten Personen mindestens 50 an dieser Kreistagswahl beteiligt haben.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(|X_{1000}-\mu|\leq 10)$ und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.

e) Ermitteln Sie, welchen Umfang eine Stichprobe mindestens haben muss, damit sich in dieser Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein Nichtwähler befindet.

2. Für die Neuwahl des Kreistages möchte eine Partei A die absolute Mehrheit aller Stimmen erhalten. Bei einer Meinungsumfrage in einer Stichprobe von 5000 wahlberechtigten Personen gaben 2600 an, dass sie die Partei A wählen würden.

a) In einer Wahlsendung nach dieser Meinungsumfrage wird gesagt:

   Trotz dieser günstigen Umfragewerte ist es dennoch möglich, dass die Partei A bei der Wahl nicht die absolute Mehrheit[1] aller Stimmen erringen werden wird.

   Erläutern Sie, wie sich bei der Untersuchung dieser Aussage der Gegenstand der beurteilenden Statistik widerspiegelt.

b) Untersuchen Sie, ob die Partei A bei einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95 % die absolute Mehrheit aller Stimmen erreichen kann.

[1] Die absolute Mehrheit ist diejenige Abstimmungsmehrheit, die mehr als die Hälfte aller abgegebenen Stimmen umfasst.

Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
1a	Begründen, z. B.: – Für jede der n Personen können genau zwei Ergebnisse unterschieden werden: „Die Person hat sich an der Wahl beteiligt“ und „Die Person hat sich nicht an der Wahl beteiligt.“ – Da angenommen werden kann, dass die Entscheidung zur Wahlbeteiligung einer Person unabhängig von der Entscheidung der anderen Personen getroffen wird, bleibt die Wahrscheinlichkeit p = 0,449 unverändert.	2		
1b	Angeben z. B.: Von 50 zufällig ausgewählten Personen haben sich höchstens 25 an dieser Kreistagswahl beteiligt.		1	
1c	Berechnen, z. B.: $P(X_{100} \geq 50) = \sum_{k=50}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0{,}449^{k} \cdot 0{,}551^{100-k} \approx 0{,}1774$	2		
1d	Berechnen und Interpretieren, z. B.: $\mu = 449$; $P(439 \leq X_{1000} \leq 459) \approx 0{,}4956$ $P(\lvert X_{1000} - \mu \rvert \leq 10)$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei 1000 zufällig ausgewählten Personen die Anzahl derer, die sich an dieser Kreistagswahl beteiligt haben, um höchstens 10 vom Erwartungswert abweicht.		5	
1e	Ermitteln, z. B.: Y: Anzahl der Personen, die sich nicht an dieser Wahl beteiligt haben mit $Y \sim B_{n;\,0{,}551}$; $P(Y \geq 1) \geq 0{,}95$; $n \geq 3{,}7...$ Der Umfang der Stichprobe muss mindestens vier Personen betragen.			4
2a	Erläutern, z. B.: Für den unbekannten Wähleranteil p der Partei A lässt sich aus den Kenngrößen einer Stichprobe in Abhängigkeit von der Vertrauenswahrscheinlichkeit ein Vertrauensintervall angeben, das p enthält. Damit ist aber nicht ausgeschlossen, dass p in Wirklichkeit außerhalb dieses Vertrauensintervalls liegt. Die Wahrscheinlichkeit dieses Irrtums lässt sich begrenzen und berechnen.			2
2b	Untersuchen, z. B.: Z: Anzahl der Personen, die die Partei A wählen Annahme: $Z \sim B_{5000\,;\,p}$; Ergebnis der Stichprobe: 2600; Schätzwert der unbekannten Wahrscheinlichkeit p: $\hat{p} = \frac{Z}{n} = 0{,}52$; $\sigma^2 = 1248$ $0{,}52 - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{n} \leq p \leq 0{,}52 + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma}{n}$; $0{,}506 \leq p \leq 0{,}533$ Die kleinste Erfolgswahrscheinlichkeit, mit der das Stichprobenergebnis verträglich ist, beträgt 50,6 %. Damit kann die Partei A mit einer Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95 % mit einer absoluten Mehrheit rechnen.		4	
		4	10	6

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Die Aufgabe bildet ein breites Spektrum der allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, letztere überwiegend aus dem Inhaltsbereich „Daten und Zufall“, ab. Ausgehend von einem realen Sachverhalt werden Grundvorstellungen über binomialverteilte Zufallsgrößen mit typischen Fragestellungen der beurteilenden Statistik vereint. Exemplarisch wurden in der Aufgabe 2b eine Vertrauenswahrscheinlichkeit von 95 % gewählt. Es empfiehlt sich für die Unterrichtsarbeit, neben dieser auch die Vertrauenswahrscheinlichkeiten 90 % bzw. 99 % zu betrachten. (siehe Aufgabenvariation).

Die Aufgabenkonstruktion entspricht im Wesentlichen der einer Prüfungsaufgabe. Je nach Schwerpunktsetzung im Unterricht, z. B. für die Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen, bieten Aufgabe und Aufgabenvariationen weitere didaktisch-methodische Einsatzmöglichkeiten. Insbesondere finden sich im Teil 2 der Aufgabe und in den Aufgabenvariationen Aufträge, die kooperatives Lernen ermöglichen.

Variationsmöglichkeiten

Ermitteln Sie für eine Stichprobe vom Umfang n = 1000 zur Vertrauenswahrscheinlichkeit von 90 % ein Vertrauensintervall $[k_1;k_2]$ für die Anzahl der Personen, die sich tatsächlich an der Kreistagswahl beteiligt haben.

Beurteilen Sie folgende Aussage:

„Bei neun von zehn Stichproben wird die Anzahl der Personen, die sich tatsächlich an der Wahl beteiligt haben, mindestens k_1 und höchstens k_2 betragen.“

Hinweise zur Lösung

$X_{1000} \sim B_{1000\,;\,0{,}449}$; $\mu = 449$, $\sigma^2 = 247{,}399$

$449 - 1{,}64 \cdot \sigma \le X_{1000} \le 449 + 1{,}64 \cdot \sigma$

$423{,}204 \le X_{1000} \le 474{,}795 \Rightarrow [423\,;\,475]$

Die Aussage ist falsch.

Erst bei hinreichend vielen Stichproben wird in durchschnittlich 9 von 10 Stichproben die Anzahl der Personen, die sich tatsächlich an der Wahl beteiligt haben, im Vertrauensintervall $[k_1; k_2]$ liegen. Die Aussage deutet die relative Häufigkeit neun Zehntel dafür, dass die Anzahl der Personen, die sich tatsächlich an der Wahl beteiligt haben, als Vertrauenswahrscheinlichkeit 90 %. Jedoch können bei dieser Vertrauenswahrscheinlichkeit durchaus in weniger als 9 von 10 Stichproben die Anzahl der Personen, die sich tatsächlich an der Wahl beteiligt haben, im Intervall $[k_1; k_2]$ liegen.

Aufgabe „Kreistagswahl“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgänge
Klausuraufgabe	WTR/CAS	45 min	11/12

Einordnung in den Fachlehrplan

Kompetenzschwerpunkte

Zufallsgrößen
Binomialverteilung
Beurteilende Statistik

zu erwartende mathematische Kompetenzen

– Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen, die durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können, ermitteln
– Kenngrößen binomialverteilter Zufallsgrößen berechnen und interpretieren
– Gegenstand der beurteilenden Statistik anhand vielfältiger Anwendungssituationen erläutern
– in einfachen Fällen aus Stichproben auf eine Grundgesamtheit und exemplarisch auch aus Parametern einer Grundgesamtheit auf solche einer Stichprobe schließen
– Schätzwerte für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit binomialverteilter Zufallsgrößen ermitteln und Vertrauensintervalle um diese Schätzwerte zu konkreten Vertrauenswahrscheinlichkeiten angeben

Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen

– $P(k_1 \le X \le k_2)$
– Erwartungswert und Standardabweichung
– binomialverteilte Zufallsgröße
– Grundgesamtheit, Stichprobe
– σ - Umgebung
– Intervallschätzung
– Vertrauenswahrscheinlichkeit, Vertrauensintervall

Einordnung in das Kompetenzmodell

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
1a				x		4	4		2		
1b						2		3		1	
1c	x			x	1, 3			3	2		
1d	x			x	3, 6	2		3		5	
1e				x	4		2, 6				4
2a				x		1	2				2
2b	x			x	3, 6	1	4	4		4	