Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan

Mathematik Gymnasium

„Bakterienpopulation“

(Schuljahrgänge 11/12)

(Arbeitsstand: 06.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

Open Educational Resources

Die vorliegende Publikation, mit Ausnahme der Quellen Dritter, ist unter der „Creative Commons“-Lizenz veröffentlicht.

CC BY-SA 3.0 DE http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/

Sie dürfen das Material weiterverbreiten, bearbeiten, verändern und erweitern. Wenn Sie das Material oder Teile davon veröffentlichen, müssen Sie den Urheber nennen und kennzeichnen, welche Veränderungen Sie vorgenommen haben. Sie müssen das Material und Veränderungen unter den gleichen Lizenzbedingungen weitergeben.

Die Rechte für Fotos, Abbildungen und Zitate für Quellen Dritter bleiben bei den jeweiligen Rechteinhabern, diese Angaben können Sie den Quellen entnehmen. Der Herausgeber hat sich intensiv bemüht, alle Inhaber von Rechten zu benennen. Falls Sie uns weitere Urheber und Rechteinhaber benennen können, würden wir uns über Ihren Hinweis freuen.

Aufgabe „Bakterienpopulation“

Aufgabenvariante 1

Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienpopulation in Abhängigkeit von der Zeit wird durch eine Funktion f im Intervall $0 \leq t \leq 10$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und f(t) die Anzahl der Bakterien in Tausend. Die Abbildung 1 zeigt einen Teil des Graphen der Funktion f.

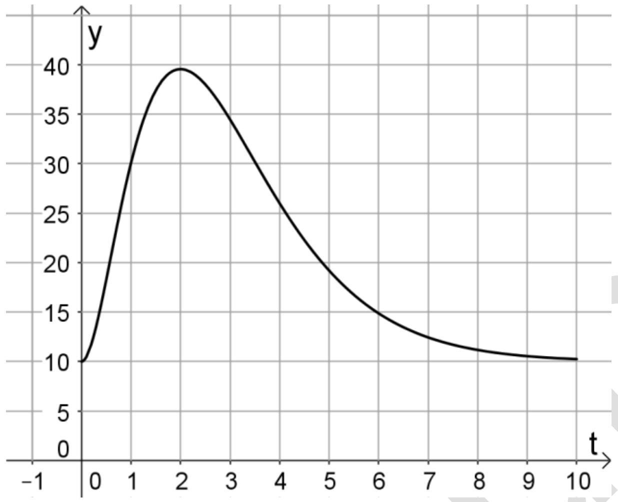


Abbildung 1

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Bakterien in der Population sechs Stunden nach Beobachtungsbeginn.

b) Geben Sie ein Zeitintervall an, in dem die Population mindestens 25000 Bakterien enthält.

c) Geben Sie an, wann die größte Bakterienanzahl in der Population erreicht wird und geben Sie diese näherungsweise an.

d) Interpretieren Sie die Gleichung $f(t) = f(t + 2{,}5)$ im Sachzusammenhang und ermitteln Sie einen Wert t.

e) Ermitteln Sie ein Zeitintervall, in dem die mittlere Anzahl der in der Population enthaltenen Bakterien 30000 beträgt.

Aufgabenvariante 2

Die Anzahl der Bakterien in einer Bakterienpopulation in Abhängigkeit von der Zeit wird durch eine in R definierte Funktion f mit $f(t) = 10 + t^2 \cdot e^{4-t}$ mit $t \geq 0$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und f(t) die Anzahl der Bakterien in Tausend.

a) Berechnen Sie die Anzahl der in der Population enthaltenen Bakterien bei Beobachtungsbeginn.

b) Untersuchen Sie, wie viele Bakterien sich langfristig in der Population befinden werden.

c) Berechnen Sie die mittlere Anzahl an Bakterien während der ersten zwei Stunden.

d) Berechnen Sie, wann in der Population die größte Bakterienanzahl erreicht wird und ermitteln Sie diese Anzahl.

e) Beschreiben Sie die Entwicklung der Bakterienpopulation innerhalb der ersten sechs Stunden.

Erprobung

Quelle: Bildungsserver Sachsen-Anhalt (http://www.bildung-lsa.de) | Lizenz: Creative Commons (CC BY-SA 3.0)

Aufgabenvariante 3

Das Wachstum einer Bakterienpopulation wird im Intervall $0 \leq t \leq 10$, $t \in R$, durch eine in R definierte Funktion f mit $f(t) = 2te^{4-t} - t^2e^{4-t}$ beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und f(t) die Anzahl der Bakterien in Tausend pro Stunde.
Der Graph der Funktion f besitzt genau zwei lokale Extrempunkte, den Hochpunkt $H(0{,}56 \,|\, 25{,}18)$ und den Tiefpunkt $T(3{,}41 \,|\, -8{,}67)$.

Die Funktion F mit $F(t) = t^2 \cdot e^{4-t}$ ist eine Stammfunktion der Funktion f.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

b) Geben Sie an, wann in der Population die größte Bakterienanzahl erreicht wird und begründen Sie.

c) Berechnen Sie den Wert $\int_0^1 f(t)\,dt$ und deuten Sie diesen im Sachzusammenhang.

d) Vier Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich 26000 Bakterien in der Population. Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien zu Beobachtungsbeginn.

Aufgabenvariante 4

Das Wachstum einer Bakterienpopulation wird im Intervall $0 \leq t \leq 10$ durch eine in R definierte Funktion f beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden und f(t) die Anzahl der Bakterien in Tausend pro Stunde.
Bei Beobachtungsbeginn beträgt die Anzahl der Bakterien in der Population 10000.
Die Abbildung 2 zeigt einen Teil des Graphen der Funktion f.

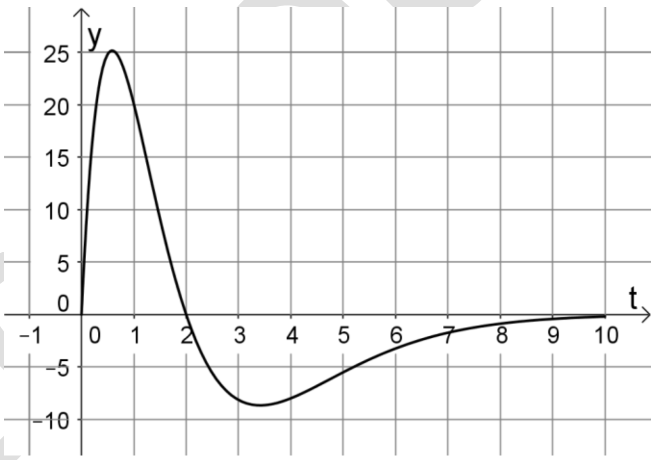


Abbildung 2

a) Beschreiben Sie die Entwicklung der Bakterienpopulation innerhalb der ersten sechs Stunden.

b) Geben Sie einen Wert für t an, an dem die Anzahl der Bakterien in der Population maximal ist und begründen Sie.

c) Ermitteln Sie die Anzahl der im Zeitraum $1 \leq t \leq 2$ zur Population dazukommenden Bakterien.

Erprobung

Quelle: Bildungsserver Sachsen-Anhalt (http://www.bildung-lsa.de) | Lizenz: Creative Commons (CC BY-SA 3.0)

Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

Aufgabenvariante 1

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
1a	Ermitteln, z. B.: $f(6) \approx 15$; Anzahl der Bakterien sechs Stunden nach Beobachtungsbeginn: 15000	x		
1b	Angeben, z. B.: $0{,}8 \le t \le 4{,}2$	x		
1c	Angeben, z. B.: Die größte Bakterienanzahl wird zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn erreicht und diese beträgt ca. 39000.		x	
1d	Interpretieren und Ermitteln, z. B.: Die Gleichung beschreibt einen Bestand zu einem bestimmten Zeitpunkt nach Beobachtungsbeginn, der 2,5 Stunden später wieder erreicht wird. $t = 1$: $f(1) \approx 30$, $f(3{,}5) \approx 30$, d. h. sowohl eine Stunde als auch 3,5 Stunden nach Beobachtungsbeginn befinden sich ca. 30000 Bakterien in der Population			x
1e	Ermitteln, z. B.: $3 \le t \le 4$			x

Aufgabenvariante 2

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
2a	Berechnen, z. B.: $f(0) = 10$, Anzahl der Bakterien zu Beobachtungsbeginn: 10000	x		
2b	Untersuchen, z. B.: Verhalten von f für $t \to +\infty$: Grenzwert 10, d. h. der Bestand der Bakterien nähert sich 10000 an		x	
2c	Berechnen, z. B.: $\frac{f(2)-f(0)}{2} \approx 14{,}78$, d. h. der mittlere Zuwachs beträgt etwa 15000. Folglich befinden sich während der ersten zwei Stunden durchschnittlich 25000 Bakterien in der Population.	x		
2d	Berechnen, z. B.: $f'(t) = 2t \cdot e^{4-t} - t^2 \cdot e^{4-t}$; $f''(t) = (t^2 - 4t + 2) \cdot e^{4-t}$ $f'(t) = 0 \iff t = 0$ oder $t = 2$; $f'(2) = 0$; $f''(2) < 0$; $f(2) \approx 39.56$ Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn wird in der Population die größte Bakterienanzahl erreicht. Diese beträgt zu diesem Zeitpunkt ca. 40000.		x	
2e	Beschreiben, z. B.: Innerhalb der ersten zwei Stunden nimmt die Anzahl der Bakterien stark zu (von 10000 auf 40000) und erreicht zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn die maximale Anzahl. Danach nimmt die Anzahl der Bakterien ab und nach sechs Stunden befinden sich ca. 15000 Bakterien in der Population.		x	

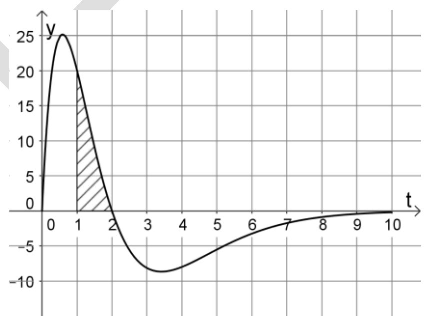
Erprobung

Quelle: Bildungsserver Sachsen-Anhalt (http://www.bildung-lsa.de) | Lizenz: Creative Commons (CC BY-SA 3.0)

Aufgabenvariante 3

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
3a	Berechnen, z. B.: $(2t - t^2) \cdot e^{4-t} = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 2$	x		
3b	Angeben und Begründen, z. B.: t = 2 Aufgrund der vorliegenden Eigenschaften der Funktion f gilt $f(t) \geq 0$ nur für $0 \leq t \leq 2$. Nach zwei Stunden ist in der Population die Bakterienanzahl am größten.		x	
3c	Berechnen und Deuten, z. B.: $\int_0^1 f(t)\,dt = F(1) \approx 20{,}1$ Eine Stunde nach Beobachtungsbeginn hat sich die Anzahl der Bakterien in der Population um ca. 20100 erhöht.		x	
3d	Berechnen, z. B.: $\int_0^4 f(t)\,dt = \left[t^2 \cdot e^{4-t}\right]_0^4 = 16$ 26000 – 16000 = 10000 Die Anzahl der Bakterien zu Beobachtungsbeginn beträgt 10000.			x

Aufgabenvariante 4

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
4a	Beschreiben, z. B.: Innerhalb der ersten zwei Stunden nimmt die Anzahl der Bakterien beginnend bei 10000 stark zu und erreicht zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn die maximale Anzahl. Danach nimmt die Anzahl der Bakterien ab. Etwa 0,8 und 3,4 Stunden nach Beobachtungsbeginn wechselt das Änderungsverhalten.		x	
4b	Angeben und Begründen, z. B.: t = 2 $f(t) \geq 0$ für $0 \leq t \leq 2$	x		
4c	Ermitteln, z. B.:  Die Maßzahl der schraffierten Fläche beträgt ca. 10, d. h. im angegebenen Zeitintervall kommen in der Population ca. 10000 Bakterien dazu.		x	

Erprobung

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Die Aufgabe „Bakterienpopulation“ wird als Lernaufgabe in vier verschieden Varianten vorgestellt. Ein und derselbe Sachzusammenhang (Wachstum einer Bakterienpopulation) wird zum einen durch den Bestand (Aufgabenvarianten 1 und 2) und zum anderen durch die Änderungsrate (Aufgabenvarianten 3 und 4) beschrieben. Dabei werden Änderungsrate und Bestand in Form von Ableitungs- und Integralfunktion sowohl graphisch als auch algebraisch gegeben. Je nach Aufgabenvariante deuten Schülerinnen und Schüler die Eigenschaften der beschreibenden Funktion bzw. ihres Graphen im Sachzusammenhang. Die formulierten Teilaufgaben sind exemplarisch und illustrieren unterschiedliche Herangehensweisen beim Aufbau von Grundvorstellungen zu zentralen Begriffen der Analysis.
Es empfiehlt sich, die vier Aufgabenvarianten nicht gleichzeitig einzusetzen. Je nach unterrichtlicher Schwerpunktsetzung kann eine der vier Aufgabenvarianten gewählt werden. Hierbei kann die zu entwickelnde allgemeinen mathematische Kompetenzen handlungsleitend sein.

Erprobung

Quelle: Bildungsserver Sachsen-Anhalt (http://www.bildung-lsa.de) | Lizenz: Creative Commons (CC BY-SA 3.0)

Aufgabe „Entwicklung einer Bakterienpopulation“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgänge
Lernaufgabe	WTR	je 20 min	11/12

Einordnung der Aufgabe in den Fachlehrplan

<u>Kompetenzschwerpunkte</u>

Grundlagen der Infinitesimalrechnung
Differentialrechnung
Integralrechnung

<u>zu entwickelnde mathematische Kompetenzen</u>

- Verhalten von Funktionen im Unendlichen untersuchen
- mittlere und lokale Änderungsrate einer Funktion berechnen
- Änderungsraten funktional beschreiben und interpretieren
- Zusammenhänge zwischen Funktionen und ihren Ableitungen erkennen
- das bestimmte Integral als aus Änderungen rekonstruierten Bestand deuten

<u>Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen</u>

- Grenzwert für $x \to \infty$
- Ableitung einer Funktion an einer Stelle, Ableitungsfunktion
- lokale und globale Extrema
- notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extremstellen
- Ableitungsregeln, Stammfunktion
- bestimmtes Integral einer Funktion in einem Intervall $[a\,;b]$

Einordnung in das Kompetenzmodell

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
1a			x		1			2	x		
1b			x		3			2	x		
1c			x			1		2		x	
1d			x				4	2, 3			x
1e			x			1		2			x
2a	x		x		3				x		
2b			x		3	2		4		x	
2c	x		x		2	2		4	x		
2d	x		x		3	4		4		x	
2e			x					4		x	
3a	x		x		3				x		
3b			x			1				x	
3c	x		x		2			4		x	
3d	x		x		3		6	3		x	
4a			x					2, 4		x	
4b			x					2	x		
4c			x				6	2		x	

Erprobung

Quelle: Bildungsserver Sachsen-Anhalt (http://www.bildung-lsa.de) | Lizenz: Creative Commons (CC BY-SA 3.0)