

Fachliche Orientierungen



SACHSEN-ANHALT

Landesinstitut für Schulqualität
und Lehrerbildung (LISA)

Mathematik

Die fachlichen Orientierungen zeigen an ausgewählten Inhalten der Fachlehrpläne Sekundarschule und Gymnasium/Fachgymnasium auf, welche Aspekte zur Vorbereitung von Schülerinnen und Schülern auf einen gymnasialen Bildungsgang berücksichtigt werden müssen. Dabei sei deutlich darauf verwiesen, dass bei der getroffenen Auswahl kein Anspruch auf Vollständigkeit besteht.

Autorin: Petra Behling

Herausgeber: Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 9
06110 Halle (Saale)
www.lisa.sachsen-anhalt.de

Stand: 08.03.2017



Die vorliegende Publikation, mit Ausnahme der Quellen Dritter, ist unter der „Creative Commons“-Lizenz veröffentlicht.

 CC BY-SA 3.0 DE <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

Sie dürfen das Material weiterverbreiten, bearbeiten, verändern und erweitern. Wenn Sie das Material oder Teile davon veröffentlichen, müssen Sie den Urheber nennen und kennzeichnen, welche Veränderungen Sie vorgenommen haben. Sie müssen das Material und Veränderungen unter den gleichen Lizenzbedingungen weitergeben.

Die Rechte für Fotos, Abbildungen und Zitate für Quellen Dritter bleiben bei den jeweiligen Rechteinhabern, diese Angaben können Sie den Quellen entnehmen. Der Herausgeber hat sich intensiv bemüht, alle Inhaber von Rechten zu benennen. Falls Sie uns weitere Urheber und Rechteinhaber benennen können, würden wir uns über Ihren Hinweis freuen.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Kompetenzbereiche im Fach Mathematik.....	2
2 Abschlussorientierte Lehrplananforderungen im Fach Mathematik.....	3
3 Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht	4
4 Aufgabenbeispiele zur Differenzierung	5
4.1 Aufgaben aus zentralen Klassenarbeiten Schuljahrgang 6	5
4.2 Aufgabe aus einer Vergleichsarbeit Schuljahrgang 8	7
4.3 Niveaubestimmende Aufgaben Gymnasium Schuljahrgänge 7/8.....	8
5 Hinweise und Materialien.....	9

1 Kompetenzbereiche im Fach Mathematik

Für den Mathematikunterricht in Sachsen-Anhalt wurden die Kompetenzmodelle der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss¹ sowie der für die Allgemeine Hochschulreife² zu einem einheitlichen Kompetenzmodell entwickelt. Die enge Verflechtung der inhaltsbezogenen und der allgemeinen mathematischen Kompetenzen wird in beiden Fachlehrplänen in gleicher Weise abgebildet. Ausgewiesen sind allgemeine mathematische Kompetenzen in vier Kompetenzbereichen und inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen in vier Inhaltsbereichen.

inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen:

-  Zahlen und Größen
-  Raum und Form
-  Zuordnungen und Funktionen
-  Daten und Zufall

allgemeine mathematische Kompetenzen:

- P** Probleme mathematisch lösen
- M** mathematisch modellieren
- A** mathematisch argumentieren und kommunizieren
- D** mathematische Darstellungen und Symbole verwenden

Die äußere Struktur der Detaillierung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen ist gleich, jedoch unterscheiden sich einige der allgemeinen mathematischen Kompetenzen in der Tiefe der Ausprägung. Exemplarisch sei dies nachfolgend verdeutlicht.

		Fachlehrplan Sekundarschule	Fachlehrplan Gymnasium/Fachgymnasium
P	P3	Lösungsverfahren auswählen und unter den Aufgabenbedingungen anwenden	Lösungsverfahren auswählen, <u>entwickeln</u> und unter den Aufgabenbedingungen anwenden
A	A6	Aussagen zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen	Aussagen zu mathematischen Inhalten <u>nachvollziehen, erläutern und entwickeln</u>

Auch wenn es bei den Inhaltsbereichen weitgehende Überschneidungen in den Fachlehrplänen beider Schulformen gibt, sind im gymnasialen Bildungsgang die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen umfangreicher ausgewiesen und teilweise auch in anderen Schuljahrgängen als im Fachlehrplan Sekundarschule verortet.

¹ Sekretariat der Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss der Kultusministierkonferenz vom 4.12.2003. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2003/2003_12_04-Bildungsstandards-Mathe-Mittleren-SA.pdf

² Sekretariat der Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2012): Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.10.2012. Berlin. URL: http://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2012/2012_10_18-Bildungsstandards-Mathe-Abi.pdf

2 Abschlussorientierte Lehrplananforderungen im Fach Mathematik

Der gymnasiale Mathematikunterricht ist durch eine große inhaltliche Tiefe und Komplexität sowie eine breite inhaltliche Vernetzung geprägt. Die Schuljahrgänge 5/6 und 7/8 bilden im Fachlehrplan Gymnasium eine organisatorische Einheit, während die Schulgänge 9 und 10 separat ausgewiesen sind. Der Schuljahrgang 10 (Einführungsphase in die gymnasiale Oberstufe) ist eng an die Schuljahrgänge 11/12 (Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe) gebunden. Hier erfolgt eine Vernetzung der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen in den drei Bereichen Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik.

Exemplarisch wird im Folgenden an ausgewählten Kompetenzschwerpunkten gezeigt, wodurch sich die Fachlehrpläne unterscheiden.

	Zahlen und Größen
---	--------------------------

Sjg.	Kompetenzschwerpunkte im Fachlehrplan	
	Sekundarschule	Gymnasium/Fachgymnasium
5/6	Gleichungen	Gleichungen und Ungleichungen
7/8	Lineare Gleichungen Gleichungen und Terme	Gleichungen und Ungleichungen
9		Quadratische Gleichungen
10	Quadratische Gleichungen	

Es wird deutlich, dass die Kompetenzschwerpunkte im gymnasialen Bildungsgang dichter gefasst sind. Ein Vergleich der jeweils ausgewiesenen mathematischen Kompetenzen ist daher unabdingbar. Insbesondere ist es in diesem Inhaltsbereich wichtig, im gymnasialen Bildungsgang z. B. Ungleichungen durchgängig einzubeziehen. Diese bilden eine wesentliche Voraussetzung sowohl für das Verstehen sachadäquater Intervallangaben als auch für die Kompetenzentwicklung zum Schätzen in den Schuljahrgängen 11/12.

Neben den Unterschieden bei den inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind auch die unterschiedlichen Akzentuierungen der allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu berücksichtigen. Im Abschnitt 3 wird dies an Aufgabenbeispielen gezeigt.



Raum und Form

Sjg.	Kompetenzschwerpunkte im FLP	
	Sekundarschule	Gymnasium
5/6	Geometrische Grundbegriffe und Symmetrie	Geometrische Grundbegriffe und Symmetrie
	Umfang, Flächeninhalt und Volumen	Umfang, Flächeninhalt und Volumen
	Winkelbeziehungen	Winkelbeziehungen
	Dreiecke	Dreiecke
		Vierecke
7/8	Vierecke	
	Kreise	Kreise
	Körperdarstellung	Körperdarstellung
	Körperberechnung	Körperberechnung
	Rechtwinklige Dreiecke	Satzgruppe des Pythagoras
		Ähnlichkeit
9	Pyramide, Kegel, Kugel, zusammengesetzte Körper	
	Ähnlichkeit	
		Trigonometrie
10	Trigonometrie	
		Vektoren

Auch diese Übersicht zeigt, dass Schülerinnen und Schüler, die sich auf einen gymnasialen Bildungsgang vorbereiten, bereits in den Schuljahrgängen 7/8 weitere, über den Fachlehrplan Sekundarschule hinausgehende, inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen erwerben müssen.

Für die hier nicht aufgeführten Inhaltsbereiche Daten und Zufall sowie Zuordnungen und Funktionen ist eine entsprechende Analyse der in den Schuljahrgängen 5/6 und 7/8 ausgewiesenen Kompetenzschwerpunkte im Fachlehrplan Gymnasium zu empfehlen.

Die dort ausgewiesenen mathematischen Kompetenzen bilden grundlegende Voraussetzungen für eine erfolgreiche Kompetenzentwicklung in den Bereichen Stochastik bzw. Analysis.

3 Einsatz digitaler Medien und Werkzeuge im Mathematikunterricht

Anders als im Fachlehrplan Sekundarschule ist im Abschnitt 2.4 des Fachlehrplans Gymnasium/Fachgymnasium der Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht ab Schuljahrgang 5 in der Hand der Lernenden verbindlich festgelegt. Es wird unterschieden zwischen Wissenschaftlichen Taschenrechnern (WTR) und „Computer-Algebra-Systemen“ (CAS). Die Kennzeichnung des Hilfsmittels mit CAS meint nicht „Computer-Algebra-Systeme“ im engeren Sinne, sondern wird synonym für digitale Lernwerkzeuge, sogenannte Multi-Repräsentationssysteme, verwendet. Diese zeichnen sich durch die gleichzeitige Verfügbarkeit der

unterschiedlichen Tools und damit durch die Möglichkeit der Vernetzung, z. B. durch graphische, numerische und algebraische Darstellungsweisen aus.

Aus fachdidaktischer Sicht sind digitale Werkzeuge ein unverzichtbares Hilfsmittel für einen zeitgemäßen Mathematikunterricht. Insbesondere sei hier auf das im Abschnitt 2.4 beschriebene Potential dieser Werkzeuge beim entdeckenden Lernen oder bei der Gestaltung individueller Lernwege hingewiesen. In den niveaubestimmenden Aufgaben zum Fachlehrplan Gymnasium finden sich vielfältige Anregungen zum Einsatz dieser Medien und Werkzeuge im Unterricht und in Leistungserhebungen.

4 Aufgabenbeispiele zur Differenzierung

4.1 Aufgaben aus zentralen Klassenarbeiten Schuljahrgang 6

Aufgabe 1

Die Schwebebahn in Thale überwindet von der Talstation im Bodetal bis zur Bergstation auf dem Hexentanzplatz einen Höhenunterschied von 244 m. Dabei wird ein Weg von 728 m zurückgelegt. Die folgende Tabelle enthält für eine bestimmte Fahrgeschwindigkeit drei Wertepaare für die Zuordnung Zeit (in min) → Weg (in m). <table><tr><td>Zeit in min</td><td>2</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>Weg in m</td><td>180</td><td>540</td><td>720</td></tr></table>		Zeit in min	2	6	8	Weg in m	180	540	720	
Zeit in min	2	6	8							
Weg in m	180	540	720							
Aufgabenstellung Sekundarschule a) Stelle die geordneten Paare in einem Koordinatensystem dar. b) Entscheide mithilfe der Darstellung, ob diese Zuordnung direkt proportional ist. Begründe deine Entscheidung.		Aufgabenstellung Gymnasium Untersuche mithilfe einer graphischen Darstellung, ob bei dieser Zuordnung zwischen Zeit und Weg ein direkt proportionaler Zusammenhang besteht. Untersuchungsergebnis mit Begründung: 								

Anmerkung:

In beiden Schulformen wurde das Koordinatensystem, mit dem gearbeitet werden sollte, vorgegeben. Dabei waren die Koordinatenachsen bezeichnet, eine Skalierung musste durch die Schülerinnen und Schüler vorgenommen werden.

Aufgabe 2

Aufgabenstellung Sekundarschule	Aufgabenstellung Gymnasium														
Begründe, dass die gegebene Zuordnung direkt proportional ist und gib einen Proportionalitätsfaktor an. <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>1,5</td><td>3,0</td><td>7,5</td></tr></table> Begründung: Proportionalitätsfaktor:	x	1	2	5	y	1,5	3,0	7,5	Ergänze die Tabelle, so dass eine direkt proportionale Zuordnung $y \sim x$ entsteht. <table><tr><td>x</td><td>2</td><td></td></tr><tr><td>y</td><td>1,6</td><td>4,8</td></tr></table> Gib für diese Zuordnung einen Proportionalitätsfaktor an.	x	2		y	1,6	4,8
x	1	2	5												
y	1,5	3,0	7,5												
x	2														
y	1,6	4,8													

In den Aufgaben 1 und 2 werden jeweils die gleichen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen aus den Kompetenzschwerpunkten der Schuljahrgänge 5/6 „Direkte und indirekte Proportionalität“ bzw. „Zuordnungen, direkte und indirekte Proportionalität“ überprüft. Dennoch unterscheiden sich die Aufgabenstellungen voneinander. Im gymnasialen Bildungsgang sind die Aufgaben komplexer formuliert und die Symbolsprache wird stärker verwendet. Insbesondere werden unterschiedliche allgemeine mathematische Kompetenzen geprüft, wie folgende Einordnungen in das Kompetenzmodell verdeutlichen.

Aufgabenstellung Sekundarschule:

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
1			x		1		4	2		x	x
2	x		x		3		4		x	x	

Aufgabenstellung Gymnasium:

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
1			x		1, 3		4	2		x	x
2	x		x		3	2		3	x	x	

Für die Arbeit im Unterricht enthält die Aufgabe 1 (Aufgabenstellung Gymnasium) weiteres Potential. Das Signalwort „untersuche“ ermöglicht eine freie Wahl des Vorgehens. Hier wäre zur Bearbeitung der Aufgabe durch die Schülerinnen und Schüler auch ein Einsatz digitaler

Mathematikwerkzeuge denkbar. Entsprechend müssten die Ergebnisse dargestellt und kommuniziert werden.

Die Aufgaben 1 und 2 zeigen zudem eine Möglichkeit der Differenzierung im Unterricht auf. Die gleiche Aufgabe (z. B. Aufgabe 1) wird durch die Vorstrukturiertheit und den Komplexitätsgrad variiert. Dies ermöglicht unterschiedliche Wege zum Erreichen der Lernziele.

Eine weitere Orientierung gibt die niveaubestimmende Aufgabe „Drachen“ (Schuljahrgänge 5/6) des Gymnasiums. Hier muss beachtet werden, dass Vierecke nach dem Fachlehrplan der Sekundarschule erst in den Schuljahrgängen 7/8 vorgesehen sind. Ein Einsatz der Aufgabe „Drachen“ kann aber auch in diesen Schuljahrgängen erfolgen. Besonders die Aufgaben 2c (Beurteilen einer Aussage) und 3d (Herleiten einer Formel) sind zur Vorbereitung der Schülerinnen und Schüler auf einen gymnasialen Bildungsgang geeignet.

4.2 Aufgabe aus einer Vergleichsarbeit Schuljahrgang 8

Aufgabenstellung Gymnasium														
Aufgabe 16: Verlauf des Graphen														
16.1 Prüfe, ob die Aussagen über die Gerade $y = 5x - 5$ wahr oder falsch sind. Kreuze jeweils an. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="width: 60%;">Die Gerade ...</th> <th style="width: 20%;">wahr</th> <th style="width: 20%;">falsch</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>... verläuft durch den Koordinatenursprung (0 0).</td> <td style="text-align: center;">☐</td> <td style="text-align: center;">☐</td> </tr> <tr> <td>... hat eine positive Steigung.</td> <td style="text-align: center;">☐</td> <td style="text-align: center;">☐</td> </tr> <tr> <td>... schneidet die x-Achse im Punkt (5 0).</td> <td style="text-align: center;">☐</td> <td style="text-align: center;">☐</td> </tr> </tbody> </table>			Die Gerade ...	wahr	falsch	... verläuft durch den Koordinatenursprung (0 0).	☐	☐	... hat eine positive Steigung.	☐	☐	... schneidet die x-Achse im Punkt (5 0).	☐	☐
Die Gerade ...	wahr	falsch												
... verläuft durch den Koordinatenursprung (0 0).	☐	☐												
... hat eine positive Steigung.	☐	☐												
... schneidet die x-Achse im Punkt (5 0).	☐	☐												
16.2 Prüfe, ob die Aussagen über die Gerade $y = mx + n$ wahr oder falsch sind, wenn $m < 0$ und $n \neq 0$. Kreuze jeweils an. <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th style="width: 60%;">Die Gerade ...</th> <th style="width: 20%;">wahr</th> <th style="width: 20%;">falsch</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>... verläuft durch den Koordinatenursprung (0 0).</td> <td style="text-align: center;">☐</td> <td style="text-align: center;">☐</td> </tr> <tr> <td>... hat eine positive Steigung.</td> <td style="text-align: center;">☐</td> <td style="text-align: center;">☐</td> </tr> <tr> <td>... schneidet die y-Achse im Punkt (0 n).</td> <td style="text-align: center;">☐</td> <td style="text-align: center;">☐</td> </tr> </tbody> </table>			Die Gerade ...	wahr	falsch	... verläuft durch den Koordinatenursprung (0 0).	☐	☐	... hat eine positive Steigung.	☐	☐	... schneidet die y-Achse im Punkt (0 n).	☐	☐
Die Gerade ...	wahr	falsch												
... verläuft durch den Koordinatenursprung (0 0).	☐	☐												
... hat eine positive Steigung.	☐	☐												
... schneidet die y-Achse im Punkt (0 n).	☐	☐												

Die Aufgabe 16: Verlauf des Graphen überprüft mathematische Kompetenzen aus dem Kompetenzschwerpunkt „Lineare Funktionen“. Hier wird der gymnasiale Anspruch deutlich aufgezeigt. Um die Eigenschaften des Graphen einer linearen Funktion abzuleiten, muss ein gedanklicher Wechsel von der Funktionsgleichung zur Geraden im Koordinatensystem erfolgen. Dies ist ein hoher kognitiver Anspruch. Während in der Teilaufgabe 1 eine konkrete Gerade gegeben ist, wird in der Teilaufgabe 2 eine Geradenschar, gegeben durch eine Funktionsgleichung, betrachtet. Die symbolisch formale Darstellung muss dabei verstanden und interpretiert werden.

Die Einordnung in das Kompetenzmodell weist die zu überprüfenden Kompetenzen aus.

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
					P	M	A	D	I	II	III
16.1			x				5	3	x		
16.2			x				5	3			x

Für die Arbeit im Unterricht bietet diese Aufgabe viel Potential. Schülerinnen und Schüler sollten z. B. unterschiedliche Lösungswege reflektieren, getroffene Entscheidungen unter Verwendung der Fachsprache begründen. Wichtig wäre aber auch, zunächst die Aussagen zum mathematischen Inhalt erläutern zu lassen.

4.3 Niveaubestimmende Aufgaben Gymnasium Schuljahrgänge 7/8

Für ein erfolgreiches Lernen im Schuljahrgang 9 sind die niveaubestimmenden Aufgaben „Kreisverkehr“ und „Moderne Architektur“ richtungsweisend.³ Beide Aufgaben sind komplex gestaltet und für einen Einsatz in einem Aufgabenpraktikum entwickelt. Bei dem Einsatz dieser Aufgaben im Unterricht, muss berücksichtigt werden, dass diese auch Kompetenzen, die im Fachlehrplan Sekundarschule erst in den Schuljahrgängen 9/10 ausgewiesen sind, überprüfen.

³ Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2016): Niveaubestimmende Aufgaben zum Fachlehrplan Gymnasium/Fachgymnasium Mathematik. Halle (Saale).
URL: <https://shrt.es/gym-nba-mathematik> (20.02.2017)

5 Hinweise und Materialien

Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt (MK) (Hrsg.) (2012): Fachlehrplan Sekundarschule Mathematik. Magdeburg. URL: <https://shrt.es/sks-flp-mathematik> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2012): Niveaubestimmende Aufgaben für die Sekundarschule, Mathematik. Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/sks-nba-mathematik> (20.02.2017)

Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt (MK) (Hrsg.) (2015): Fachlehrplan Gymnasium/Fachgymnasium Mathematik. Magdeburg. URL: <https://shrt.es/gym-flp-mathematik> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2016): Niveaubestimmende Aufgaben zum Fachlehrplan Gymnasium/Fachgymnasium Mathematik. Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/gym-nba-mathematik> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2014): Kompetenzmodell für den Mathematikunterricht in Sachsen-Anhalt. (Aktualisierung der Fassung von 2008 unter Berücksichtigung der Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife). Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/gym-kompetenzmodell-mathematik> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2010): Tägliche Übungen im Mathematikunterricht. Unverzichtbare Methode zur Sicherung von Basiswissen – Erprobte Empfehlungen zur effektiven Gestaltung. Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/sks-tue-mathematik> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2009): Vom Begründen zum Beweisen.- Standpunkte und Linienführung im Lehrplan Mathematik. Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/sks-begrunden-beweisen> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2010): Zeichnerisches Darstellen im Mathematikunterricht: Skizzieren – Zeichnen – Konstruieren. Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/sks-darstellen-mathematik> (20.02.2017)

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA) (Hrsg.) (2016): Signalworte für Arbeitsaufträge im Fach Mathematik. Halle (Saale). URL: <https://shrt.es/signalworte-mathematik> (20.02.2017)