

Niveaubestimmende Aufgaben für den Mathematikunterricht Schuljahrgang 8

Arbeitsstand: 13.09.2005



SACHSEN-ANHALT

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgaben haben mitgewirkt:

Dr. Blachowiak, Renate	Köthen
Dr. Eid, Wolfram	Magdeburg
Hambach, Dany	Holleben
Dr. Pruzina, Manfred	Halle (Leitung der Kommission)
Schuhmann, Rosmarie	Halle (LISA)
Winkel, Sabine	Stendal

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1	Zur Funktion der niveaubestimmenden Aufgaben 4
2	Mathematische Kompetenzen – Zielniveau Schuljahrgang 8 6
2.1	Allgemeine mathematische Kompetenzen 6
2.2	Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen 9
2.3	Anforderungsbereiche 12
3	Aufgabenbeispiele 13
3.1	Zahlen und Größen 13
3.2	Gleichungen und Ungleichungen 20
3.3	Zuordnungen und Funktionen 26
3.4	Geometrie 35
3.5	Stochastik 46
4	Zur Beachtung von Anforderungsbereichen beim Entwickeln allgemeiner mathematischer Kompetenzen – Kommentare zu ausgewählten Aufgaben 52
4.1	Zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“ 53
4.2	Zur Kompetenz „mathematisch modellieren“ 58
4.3	Zur Kompetenz „mathematisch argumentieren“ 61
4.4	Zur Kompetenz „mathematische Darstellungen verwenden“ 68

1 Zur Funktion der niveaubestimmenden Aufgaben

Planungsgrundlage für den Mathematikunterricht sind die gültigen Rahmenrichtlinien für die Sekundarschule und für das Gymnasium. Dort sind auch Ziele und Inhalte für die Schuljahrgänge 7 und 8 beschrieben.

Mit den vorliegenden *niveaubestimmenden Aufgaben für den Schuljahrgang 8* wird der Versuch unternommen, das Niveau zu beschreiben, das Schüler am Ende des Schuljahrganges 8 im Regelfall erreicht haben sollen. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Zielniveau am Ende des 8. Schuljahrganges das Zielniveau am Ende des 6. Schuljahrganges einschließt, ohne jeweils die entsprechenden Kompetenzen (s. Material *Niveaubestimmende Aufgaben für den Schuljahrgang 6*) im Einzelnen erneut auszuweisen.

Die *niveaubestimmenden Aufgaben für den Schuljahrgang 8* stellen eine Interpretation und Konkretisierung der Rahmenrichtlinien im Land Sachsen-Anhalt dar und berücksichtigen zugleich die KMK-Bildungsstandards für den Mittleren Schulabschluss. Sie sollen den Mathematiklehrkräften helfen, die am Ende des Schuljahrganges 8 zu erreichenden mathematischen Kompetenzen als Ganzes zu erfassen und ihren Unterricht langfristig daran zu orientieren.

Die am Ende des 8. Schuljahrganges nachzuweisenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind im Kapitel 2 beschrieben.

Die Aufgaben im Kapitel 3 haben mehrere Funktionen zu erfüllen:

- Sie stellen eine Konkretisierung der im Kapitel 2 beschriebenen mathematischen Kompetenzen dar.
- Sie können für die Unterrichtsgestaltung unmittelbar verwendet werden, z. B. bei der Erarbeitung oder Festigung – ggf. je nach didaktisch-methodischer Intention modifiziert.
- Sie operationalisieren die zu erreichenden Ziele und liefern damit auch Anhaltspunkte für die Durchführung von Lernkontrollen. Die Aufgaben bilden somit auch eine Grundlage für die Analyse von Schülerleistungen und für die schulinterne Evaluation.

Allerdings ist zu beachten, dass die Aufgaben in ihrer Gesamtheit das Zielniveau beschreiben.

Ein besonderes Anliegen ist es, dass die Entwicklung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen im Zusammenhang mit den inhaltsbezogenen Kompetenzen als wesentliches, ja letztlich wichtigstes Ziel im Mathematikunterricht begriffen wird und zu einer entsprechenden Unterrichtsgestaltung führt.

Dazu soll insbesondere das Kapitel 4 Anregungen geben.

Aus all dem wird deutlich: Die *niveaubestimmenden Aufgaben für den Schuljahrgang 8* stellen nicht schlechthin eine Aufgabensammlung dar, sondern sie ergänzen die Rahmenrichtlinien Mathematik durch Aufgabenbeispiele zur Verdeutlichung der verbindlichen Ziele.

Aus den Aufgabenbeispielen können Übungsserien für den Unterricht entstehen, wenn Lehrkräfte für ihre Lerngruppen von den niveaubestimmenden Aufgaben ausgehend ähnliche Aufgaben mit unterschiedlichen Anforderungen entwickeln, z. B. nach dem Muster der Aufgabentripel (vgl. Kapitel 4).

Das Material *Niveaubestimmende Aufgaben für den Schuljahrgang 8* gilt sowohl für die Sekundarschule als auch für das Gymnasium. Differenzierungen im Anspruchsniveau bestehen sowohl quantitativ (erweiterte Unterrichtsinhalte) als auch qualitativ.

Die rein quantitativen Unterschiede werden dadurch berücksichtigt, dass die nur für das Gymnasium geltenden Kompetenzen kursiv hervorgehoben und mit dem Zusatz „(Gym)“ gekennzeichnet sind.

Die qualitativen Unterschiede bei der Kompetenzentwicklung am Gymnasium im Vergleich zur Sekundarschule werden darüber hinaus dadurch berücksichtigt, dass eine größere inhaltliche Tiefe, eine breitere inhaltliche Vernetzung sowie generell ein höherer Anspruch am Gymnasium zu verwirklichen ist.

Das Anspruchsniveau hängt wesentlich von der Art der Einbindung der Aufgaben in den Lernprozess ab. Auch weitere Faktoren haben darauf Einfluss wie z. B. Arbeitszeit, Umfang der Hilfen bzw. der zugelassenen Hilfsmittel und nicht zuletzt der Erwartungshorizont.

2 Mathematische Kompetenzen – Zielniveau Schuljahrgang 8

Mathematische Allgemeinbildung muss sich im verständnisvollen Umgang mit Mathematik und in der Fähigkeit zeigen, das „Werkzeug“ Mathematik funktional beim Bewältigen von mathematikhaltigen Anforderungen in verschiedenen Kontexten zu nutzen. Für eine entsprechende Kompetenzentwicklung ist es hilfreich, zwei verschiedene, aber eng miteinander verbundene Sichtweisen zu unterscheiden. Dabei handelt es sich zum einen um allgemeine mathematische Kompetenzen und zum anderen um inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen.

Mit allgemeinen mathematischen Kompetenzen sind bestimmte Leistungsdispositionen zur Lösung von Aufgaben gemeint, die Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kenntnisse und Verhaltenseigenschaften umfassen, die zwar fachspezifisch vom mathematischen Arbeiten geprägt sind, aber nicht an spezielle mathematische Inhalte gebunden sind. Sie können aber nur durch inhaltsbezogene mathematische Tätigkeiten entwickelt werden.

Mit inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind bestimmte Leistungsdispositionen gemeint, die ebenfalls Fähigkeiten, Fertigkeiten, Kenntnisse und Verhaltenseigenschaften umfassen, aber sich auf das Bewältigen von Anforderungen in speziellen mathematischen Inhaltsbereichen beziehen. Diese Inhaltsbereiche sind letztlich curricular bestimmt. Internationale Studien zeigen jedoch, dass es gemeinsame, ja unverzichtbare Inhaltsbereiche gibt, die zum Kern mathematischer Allgemeinbildung gehören.

2.1 Allgemeine mathematische Kompetenzen

In Anlehnung an die KMK-Bildungsstandards¹ werden folgende allgemeine mathematische Kompetenzen hervorgehoben:

Die folgenden beschriebenen Kompetenzen bzw. Teilkompetenzen beziehen sich auf Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler, die sich aus altersgerechten Aufgabenstellungen hinsichtlich Umfang sowie sprachlicher und inhaltlicher Schwierigkeit ergeben.

¹ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.
Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003

Probleme mathematisch lösen

Die Schülerinnen und Schüler

- P 1 – können Aufgabentexte inhaltlich erschließen, analysieren und schließlich aufgabenrelevante Informationen entnehmen
- P 2 – nutzen heuristische Regeln, Strategien oder Prinzipien (insbesondere Erstellen informativer Figuren, ggf. Einzeichnen von Hilfslinien, Zerlegen in Teilaufgaben, Zurückführen auf Bekanntes)
- P 3 – wählen Lösungsverfahren aus und wenden sie unter den Aufgabenbedingungen an (inhaltlich orientierte Lösungswege, wie z. B. systematisches Probieren, Standardverfahren zu bekannten Aufgabentypen)
- P 4 – kontrollieren und interpretieren Ergebnisse, wobei sie auch auf eine dem Sachverhalt angemessene Genauigkeit achten
- P 5 – reflektieren nach Aufforderung über das Finden von Lösungsideen und Lösungswegen bzw. können ggf. alternative Lösungswege angeben
- P 6 – nutzen Hilfsmittel (insbesondere Formelsammlungen, Taschenrechner) angemessen

mathematisch modellieren

Die Schülerinnen und Schüler

- M 1 – erkennen Beziehungen oder Strukturen in inner- und außermathematischen Kontexten, die aus dem Unterricht oder aus dem Alltag bekannt sind, und können diese mithilfe von Tabellen und Variablen sowie unter Verwendung mathematischer Begriffe und Relationen beschreiben
- M 2 – können umgangs- sowie fachsprachliche Wendungen oder Signalworte aus verschiedenen Kontexten sachgerecht in Terme oder Gleichungen übersetzen (z. B. „um drei Jahre jünger“, „auf das Fünffache erhöht“, „halb so lang“) bzw. umgekehrt Terme oder Gleichungen verbalisieren
- M 3 – prüfen und interpretieren Ergebnisse in dem zugehörigen Kontext
- M 4 – ordnen mathematischen Modellen (in Form von linearen Gleichungen oder Funktionen) Anwendungssituationen zu

mathematisch argumentieren

Die Schülerinnen und Schüler

- A 1 – können Begriffe, Sätze und Verfahren an Beispielen erläutern
- A 2 – gebrauchen logische Bestandteile der Sprache (insbesondere „und“, „oder“, „genau ein“, bestimmte und unbestimmte Artikel, „für alle gilt ...“, „es gibt ein ...“ oder „es gilt nicht ...“) sachgerecht
- A 3 – können zu bekannten Sachverhalten die Wahrheit von Existenzaussagen durch Angabe eines Beispiels und die Falschheit von Allaussagen durch Angabe eines Gegenbeispiels begründen
- A 4 – sind in der Lage, Lösungen bzw. Lösungswege zu begründen
- A 5 – können einfach strukturierte mehrschrittige mathematische Argumentationen zu bekannten Sachverhalten nachvollziehen und beurteilen
- A 6 – können die Wahrheit einfach strukturierter „Wenn ..., so ...“-Aussagen zu bekannten Sachverhalten nachweisen

mathematische Darstellungen verwenden

Die Schülerinnen und Schüler

- D 1 – können Verfahren zur Darstellung geometrischer Gebilde, insbesondere des Raumes anwenden und umgekehrt aus derartigen Darstellungen eine Vorstellung von den Objekten gewinnen
- D 2 – können aus grafischen Darstellungen (vor allem in Form von Diagrammen) Informationen entnehmen und interpretieren sowie gegebene Daten in grafischer Form darstellen (vor allem als Streifendiagramm, als Kreisdiagramm oder im Koordinatensystem)
- D 3 – verstehen und verwenden vertraute symbolsprachliche Darstellungen
- D 4 – stellen Überlegungen und Lösungswege verständlich mündlich und schriftlich dar
- D 5 – verstehen und überprüfen Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten

2.2 Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen

Die inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen werden geordnet nach den Inhaltsbereichen der Rahmenrichtlinien² dargestellt.

Zahlen und Größen

Die Schülerinnen und Schüler können

- Begriffe der Prozentrechnung sowie bequeme Prozentsätze anwenden,
- Grundaufgaben der Prozentrechnung sicher lösen,
- vielfältige Sachaufgaben zur Prozentrechnung lösen (insbesondere Steigerungen und Verminderungen um bzw. auf, Zinsberechnungen),
- Streifen- und Kreisdiagramme anfertigen und interpretieren,
- die Notwendigkeit von Zahlenbereichserweiterungen an Beispielen begründen,
- rationale Zahlen vergleichen, Rechenregeln sicher anwenden, den Zusammenhang von Quadrieren und Quadratwurzelziehen nutzen sowie Ergebnisse kontrollieren,
- Zusammenhänge mit Variablen beschreiben, Terme umformen und Termwerte berechnen,
- Rechenhilfsmittel (insbesondere Taschenrechner) effektiv nutzen,
- Näherungswerte von Zahlen und Größen erkennen, haben ein inhaltliches Verständnis für das Arbeiten mit Näherungswerten und geben Ergebnisse mit sinnvoller Genauigkeit an,
- Längen, Flächeninhalte und Volumina schätzen,
- *binomische Formeln nutzen (Gym).*

² Grundlage sind die Rahmenrichtlinien Gymnasium Mathematik, Schuljahrgänge 5–12 (gültig ab 2003) sowie die Rahmenrichtlinien Sekundarschule Mathematik, Schuljahrgänge 7–10 (gültig ab 1999); Kultusministerium des Landes Sachsen-Anhalt

Gleichungen und Ungleichungen

Die Schülerinnen und Schüler können

- Grundbegriffe (vor allem „Lösung“, „Lösungsmenge“, „wahre Aussage“, „falsche Aussage“) sachgerecht verwenden,
- einfache Gleichungen und Ungleichungen inhaltlich durch systematisches Probieren und auf grafischem Wege lösen,
- lineare Gleichungen (u. a. auch Verhältnisgleichungen, Bruchgleichungen und Gleichungen mit Klammern) kalkülmäßig lösen und Formeln (z. B. aus der Physik) umstellen,
- Gleichungen zu vorgegebenen Sachverhalten (auch aus der Physik und der Geometrie) selbstständig aufstellen,
- Lösungen interpretieren und kontrollieren,
- *lineare Ungleichungen kalkülmäßig lösen (Gym).*

Zuordnungen und Funktionen

Die Schülerinnen und Schüler können

- funktionale Zusammenhänge erkennen, beschreiben und diese in verschiedenen Formen darstellen (insbesondere direkt und indirekt proportionale Zuordnungen),
- Grundbegriffe (vor allem „Funktion“, „Definitionsbereich“, „Wertebereich“, „Argument“, „Funktionswert“, „Nullstelle“) sachgerecht verwenden,
- lineare Funktionen grafisch darstellen, ihre Eigenschaften beschreiben und Nullstellen ermitteln,
- realitätsnahe Anwendungsaufgaben im Zusammenhang mit linearen Funktionen lösen,
- Funktionsgleichungen linearer Funktionen ermitteln.

Geometrie

Die Schülerinnen und Schüler können

- geometrische Grundbegriffe (vor allem „Sehne“, „Tangente“, „Hypotenuse“, „Kathete“) sachgerecht verwenden,
- Eigenschaften ebener Figuren (Dreiecke, Vierecke, Kreise) nutzen,
- Beziehungen zwischen ebenen Figuren erkennen und begründen (Lagebeziehungen, Symmetrie, Kongruenz, *Gym: auch Ähnlichkeit*),
- Sätze der ebenen Geometrie (insbesondere Sätze über Winkel am Kreis, Satz des Pythagoras, *Gym: auch Strahlensätze, Satzgruppe des Pythagoras*) beim Konstruieren nutzen,
- gerade Prismen, Kreiszylinder und Pyramiden (*Gym: auch Kreiskegel, Kugel*) skizzieren und zeichnen (Schrägbild, Zweitafelbild und Netz),
- Körper und ihre Eigenschaften aus verschiedenen Darstellungen erkennen,
- Streckenlängen und Winkelgrößen unter Nutzung der Sätze der ebenen Geometrie berechnen, insbesondere Sätze über Winkel am Kreis, Satz des Pythagoras (*Gym: auch Strahlensätze, Ähnlichkeitssätze, Satzgruppe des Pythagoras*),
- Umfang und Flächeninhalt von Vierecken und Kreisen sowie von aus ihnen zusammengesetzten Figuren berechnen,
- Volumen und Oberflächeninhalt von Prismen, Pyramiden und Zylindern (*Gym: auch von Kegeln und Kugeln*) berechnen.

Stochastik

Die Schülerinnen und Schüler können

- zufällige Ereignisse im Alltag beschreiben und mögliche Ergebnisse von Zufallsversuchen angeben,
- Grundbegriffe (vor allem „Ergebnis“, „Ereignis“ und „Wahrscheinlichkeit“) sachgerecht anwenden,
- absolute und relative Häufigkeiten berechnen und grafisch darstellen,
- Baumdiagramme als Hilfsmittel zur Beschreibung einfacher, auch mehrstufiger Zufallsversuche verwenden,
- Wahrscheinlichkeiten von Zufallsversuchen berechnen und dabei auch die Pfadregeln benutzen,
- *Anzahlen von Ergebnissen mehrstufiger Zufallsexperimente ermitteln (Gym).*

2.3 Anforderungsbereiche

Das erfolgreiche Bearbeiten von Aufgaben erfordert im Allgemeinen Kompetenzen in unterschiedlicher Ausprägung. Diese werden zum einen durch die objektive Anforderungsstruktur von Aufgaben und zum anderen durch den Bekanntheits- oder Vertrautheitsgrad der Anforderung bestimmt.

Durch didaktische Analyse von Aufgaben kann man diese unterschiedlichen Anforderungsbereichen zuordnen. In der Praxis hat sich das folgende dreistufige Modell bewährt.

Anforderungsbereich I: „**Reproduktionsleistungen**“

Wiedergabe oder direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in geübten Zusammenhängen (z. B. geübte Standardaufgaben, im Allgemeinen Aufgaben ohne Modellbildung, einschrittige Begründungen).

Anforderungsbereich II: „**Reorganisationsleistungen**“

Bearbeiten bekannter Sachverhalte, wobei ein Verknüpfen verschiedener Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten erforderlich ist (z. B. Verknüpfen geübter Standardverfahren in vertrauten Kontexten, Modellbildung in Rahmen geübter Aufgabenklassen).

Anforderungsbereich III: „**Problemlösungen**“

Gegenüber Anforderungsbereich II erhöhter Komplexitätsgrad, wenig vertrauter Kontext oder höherer Allgemeingrad (z. B. mehrschrittige Argumentationen, Folgerungen, Interpretationen, Modellbildung in neuen Situationen)

Der Komplexitätsgrad der kognitiven Anforderungen steigt bei Aufgaben aus diesen drei Anforderungsbereichen deutlich an.

Obwohl die Zuordnung von Aufgaben zu Anforderungsbereichen nicht immer eindeutig ist, sind die Anforderungsbereiche für die Unterrichtspraxis wichtig und nützlich. Zum einen liefert dieses Modell Anhaltspunkte zur Realisierung des Unterrichtsprinzips der systematischen Steigerung von Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler. Zum anderen kann im Rahmen von Lernkontrollen der Entwicklungsstand allgemeiner und inhaltsbezogener mathematischer Kompetenzen durch Einbeziehung von Aufgaben aus allen drei Anforderungsbereichen differenzierter erfasst werden.

3 Aufgabenbeispiele

Die folgenden Aufgabenbeispiele werden unter drei Aspekten betrachtet:

- a) inhaltsbezogene Kompetenzen durch Ordnung nach Inhaltsbereichen (vgl. Abschnitt 2.2),
- b) Anforderungsbereiche durch Analyse der objektiven Anforderungsstruktur unter Berücksichtigung des laut Rahmenrichtlinien zu erreichenden Entwicklungsstandes (siehe Abschnitt 2.3),
- c) allgemeine mathematische Kompetenzen.

Das Lösen von Aufgaben ist stets ein ganzheitlicher Prozess, bei dem immer mehrere Leistungs- und Verhaltensdispositionen zum Einsatz kommen.

Bei der Zuordnung von allgemeinen mathematischen Kompetenzen (aus Abschnitt 2.1) werden nur diejenigen explizit genannt, die beim Lösen der betreffenden Aufgabe dominant sind bzw. deren Entwicklung durch die Bearbeitung der Aufgabe besonders unterstützt wird.

3.1 Zahlen und Größen

Anforderungsbereich 1

1. a) Ordne der Größe nach. Beginne mit der kleinsten Zahl.

$$\frac{1}{6}; -0,5; 2,5; \frac{3}{4}; -0,30; -2\frac{1}{2}; -2,6; 2,5; -\frac{8}{3}$$

- b) Übertrage die Punkte in ein Koordinatensystem und verbinde sie zu einem Viereck.

$$A(4,5; 3); \quad B(-5,5; 0); \quad C(-1; -5,5); \quad D(7; -2,5)$$

D 2

2. Berechne im Kopf.

a) $1,7 : (-1,7)$

b) $4,8 - (-1,5)$

c) $-3 \cdot (-5) + 6 \cdot (-4)$

d) $-\frac{3}{4} - 0,5$

e) $-96 : (-0,4)$

f) $|-7 - 8|$

g) $-\frac{3}{10} : \frac{5}{6}$

P 3

3. Vereinfache den Term.

- a) $-16xy : (-4y)$
- b) $3a \cdot (-3ab)$
- c) $4b + (b + 5i)$
- d) $8x - (2y + 2x)$
- e) $2a \cdot (5a + 3b)$
- f) $(8x^2 - 4xy) : 2x$

P 3

4. Schreibe als Term mit einer Variablen.

- a) eine um 4 verminderte Zahl
- b) das Doppelte einer Zahl
- c) die Hälfte einer Zahl vermehrt um 3
- d) das Quadrat des Dreifachen einer Zahl

M 2

5. Erkläre jeweils die Bedeutung der Vorsilben bei Größen.

- a) kV; kWh; kByte
- b) hPa; ha; hl
- c) ms; mA; mbar

D 3

6. Vervollständige.

Sachverhalt	Einheit	Schätzwert	ermittelter Wert	Vergleich ermittelter Wert und Schätzwert
Fläche eines Kugelstoßkreises				
Volumen der Kappe eines Füllfederhalters				

P 4

7. Berechne im Kopf.

- a) 15 % von 240 €
- b) Wie viel Prozent sind 40 g von 160 g?
- c) Toms Taschengeld wurde um 10 %, d. h. um 1,50 € erhöht. Wie viel Taschengeld erhielt er vorher?

P 3

8. Ergänze in dem Schema zugehörige Begriffe, Symbole und Werte.

- a) Es wurden 3400 Fahrräder bei einer Verkehrskontrolle überprüft. 24 % der Fahrräder hatten defekte Beleuchtung, d. h. 816 Fahrräder fuhren nachts mit schlechter bzw. gar keiner Beleuchtung.

Grundwert () : _____

() (p) : _____

() () : _____

- b) Sarah hat auf ihrem Spardbuch 2000 € eingezahlt. Der Betrag wird jährlich mit 1,5 % verzinst. Sie hat daher nach einem Jahr 2030 € auf ihrem Sparkonto.

() () : 2000 €

() () : _____

Zinsen () : _____

M 1

9. Stelle folgende rationale Zahlen auf geeigneten Abschnitten von Zahlengeraden dar.

a) $-0,5$; $\frac{6}{24}$; $\frac{1}{2}$; $|-1|$; $-\frac{4}{12}$

b) $2,\bar{3}$; $-2,5$; $2\frac{1}{2}$; $-1,\bar{3}$; $(-1)^2$

D 2

10. Der Preis für einen DVD-Recorder ist von 299 € auf 199 € ermäßigt worden.

- a) Auf wie viel Prozent ist der Preis gefallen?
b) Um wie viel Prozent wurde der Preis gesenkt?

P 2

Anforderungsbereich 2

11. Gib an, ob das Ergebnis richtig oder falsch ist (ohne Nutzung des Taschenrechners). Berichtige falsche Ergebnisse und begründe.

a) $-34 \cdot (-2) = -68$

b) $-12 + 36 : 3 - 10 = -2$

c) $0 : (-1,3) = 1,3$

d) $-6 + 4 \cdot (-0,2) = 0,4$

e) $-\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{6} = -\frac{4}{9}$

f) $(-15)^2 = 30$

g) $\sqrt{0,04} = -0,2$

P 4

A 4

12. Klammere einen geeigneten Faktor aus und kontrolliere deine Termumformung, indem du die Klammer wieder auflöst.

a) $36yz - 54z^2 = \square(4y - 6z)$

b) $-42ac - 35bc^2 + 14cd^2$

c) $-\frac{1}{4}x^2y - \frac{1}{2}xy^2$

P 3

13. Vereinfache.

a) $\frac{7x - 14y}{x - 2y}$

b) $\frac{4x + 6}{4}$

c) $\frac{a^2 - b^2}{(a + b)^2}$

d) $\frac{s^2 - 6s + 9}{s - 3}$

Gym

P 3

14. Wende die binomischen Formeln an.

- I. a) $a^2 + 6ab + \square = (a + \square)^2$
 b) $25m^2 - \square + 36n^2 = (5m - 6n)^2$
 c) $1 + x + \square = (1 + \square)^2$
 d) $49o^2 - \square op + 64p^2$
 e) $1,44x^2 - 1,69y^2$

II. Berechne im Kopf.

$$41^2$$

$$58^2$$

$$397^2$$

Gym P 3

15. Untersuche, warum das nachstehende Zahlenrätsel „funktioniert“.

Denke dir eine zweistellige Zahl. Subtrahiere vom Dreifachen der um 4 verminderten Zahl das Doppelte der um 6 verminderten Zahl.
 Sage mir dein Ergebnis und ich sage dir, welche Zahl du dir gedacht hast.

M 2

A 4

16. Berechne und gib das Ergebnis mit sinnvoller Genauigkeit an. Schätze zuerst.

- a) 1 kg Weintrauben kosten 2,99 €. Wie viel Euro muss man für 863 g Weintrauben zahlen?
 b) Wie viel m² Auslegware muss Lisa für ihr Zimmer kaufen, wenn sie eine Länge von 5,50 m und eine Breite von 4,65 m gemessen hat.
 c) Ein Auto hat für eine Strecke von 40 km etwa 3,8 l Benzin verbraucht. Wie viel Liter Benzin benötigt es für 210 km?
 d) Wie viel Kilogramm wiegen 10 Styroporplatten ($\rho = 0,03 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$) mit jeweils einer Breite von 0,60 m und einer Länge von 2,00 m und einer Stärke von 18 mm.

P 4

17. Bei Barzahlung gewährt ein Autohändler 3% Skonto auf den Kaufpreis. Ein neues Auto kostet 15400 €. Lohnt es sich, einen Kredit von 13 % für 30 Tage bei einer Bank aufzunehmen, um das Auto damit bar zu bezahlen?

P 2

18. Der Preis für einen MP3-Player von 85 € wird dreimal hintereinander um jeweils 15 % gesenkt.
 Wie hoch ist der gesamte Preisnachlass in Prozent?

P 2

19. a) Zeichne jeweils ein Mengendiagramm zu folgenden Aussagen.
- (1) Die Menge der natürlichen Zahlen N ist eine Teilmenge der Menge der gebrochenen Zahlen Q_+ .
 - (2) Die Menge der rationalen Zahlen Q ist eine Teilmenge der Menge der reellen Zahlen R .
- b) Ordne die gegebenen Zahlen als Elemente in die Mengendiagramme ein.
- $\frac{3}{4}$; 77; $0,1\bar{5}$; $\sqrt{11}$; 1,0; -0,45; $\sqrt{729}$

D 3

Anforderungsbereich 3

20. a) Untersuche, warum das nachstehende Zahlenrätsel „funktioniert“.
Denke dir eine zweistellige Zahl. Subtrahiere vom Dreifachen der um 4 verminderten Zahl die Differenz aus dem Doppelten der Zahl und 12.
Sage mir dein Ergebnis und ich sage dir, welche Zahl du dir gedacht hast.
- b) Bilde in ähnlicher Form ein anderes Zahlenrätsel und stelle es deinem Nachbarn zur Kontrolle.

M 2

A 4

21. Der Preis für einen MP3-Player wird dreimal hintereinander um jeweils 15 % gesenkt.
- a) Wie hoch ist der gesamte Preisnachlass in Prozent?
 - b) Um wie viel Prozent müsste man den reduzierten Preis erhöhen, um wieder den ursprünglichen Preis zu erhalten?

P 2

22. Der Baumbestand in einem Waldstück betrage 160 000 m³. Der Baumbestand wachse jährlich um 1,5 %.
Das Wachstum für die nächsten 2 Jahre soll mit einem Tabellenkalkulationsprogramm unter Verwendung folgender Tabelle berechnet werden.

	A	B	C
1	Anzahl der Jahre	Erhöhung des Baumbestandes in m ³	gesamter Baumbestand in m ³
2	0	0	
3	1		
4	2		

Vervollständige die Tabelle und stelle das Wachstum in einem Säulendiagramm mit einem Tabellenkalkulationsprogramm dar.

M 1

D 2

23. Hier ein Auszug aus einer Werbung:

<i>Wir schenken Ihnen die Mehrwertsteuer (16 %) bei jedem Einkauf!*</i>	* Gilt nur für Neukäufe, nicht für Werbe-ware und bereits reduzierte Ware. Hinweis: Beim Abzug der Mehrwertsteuer sparen Sie echte 13,8 % vom regulären Verkaufspreis.
--	---

Sind es nun 16 % oder 13,8 %, die man spart? Untersuche diese Frage und stelle die Lösung und Begründung ausführlich dar.

P 2

3.2 Gleichungen und Ungleichungen

Anforderungsbereich 1

1. Löse folgende Gleichungen:

a) $1,5k + 4,5k - 7,5 = 15 + 1,5k$

b) $6a - (2 - 5a) = 16 + (10a - 6)$

c) $7 : x = 1 : 49$

d) $\frac{x}{4} = \frac{3-x}{8}$

e) $\frac{4}{5}x - 1 = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}x$

P 3

2. Ermittle die Lösungsmengen folgender Gleichungen für die Variablengrundbereiche N und Z.

(1) $5y + 2 = 3y + 8$

(2) $5a - 2 = 0$

(3) $0,4 - 2r = 9,2$

P 3

3. a) Gib mindestens zwei lineare Gleichungen an, die jeweils die Lösung $\frac{1}{5}$ haben.
b) Die Zahl -5 soll eine Ungleichung erfüllen. Gib eine solche Ungleichung an.

M 1

D 4

4. Kontrolliere, ob die in Klammern angegebene Zahl Lösung der Gleichung ist.

a) $6x - 3 + 15 = 81$

($x = 4$)

b) $\frac{8}{2 \cdot (x + 6)} = \frac{1}{2}$

($x = 2$)

c) $-2 \cdot (6x + 24) = 8 \cdot (1 + x) + 44$

($x = 1$)

P 4

5. Ermittle alle ganzen Zahlen, die die nachfolgenden Ungleichungen erfüllen.

a) $4x < 25$

b) $5x - 18 > 30$

c) $-11x < -55$

d) $9 + 11x > 97$

P 3

6. Stelle die folgenden Formeln nach der in der Klammer stehenden Variablen um.

a) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ (r)

b) $R = \frac{U}{I}$ (I)

c) $V = A_G \cdot h$ (h)

d) $R_{\text{Ges}} = R_1 + R_2 + R_3$ (R_1)

e) $F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$ (F_2)

P 3

7. Gegeben ist die Ungleichung $6(3x - 7) < -(-6x + 6)$.

- Löse diese Ungleichung.
- Zeige, dass die Zahl Null eine Lösung der Ungleichung ist.
- Gib die Menge aller ganzen Zahlen an, die die Ungleichung erfüllt.
- Markiere an je einer Zahlengeraden alle natürlichen und alle rationalen Zahlen, die die Ungleichung erfüllen.

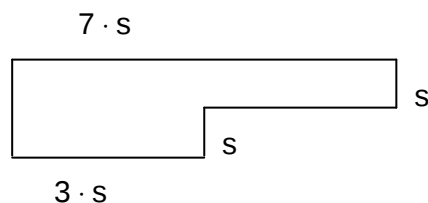
Gym P 3 D 3

8. Prüfe, ob die folgenden Ungleichungen zueinander äquivalent sind. Begründe.

- $13 - x < 0$; $0 < x + 13$; $x \in \mathbb{R}$
- $5(x - 3) > 3(x + 1)$; $-\frac{x}{2} < -4,5$; $x \in \mathbb{R}$.

Gym A 4

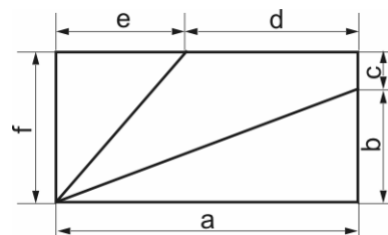
9. Gegeben ist ein Sechseck. Sein Umfang beträgt 9 cm.



- Gib für den Umfang des Sechsecks eine Gleichung unter Verwendung der Variablen s an.
- Berechne die Länge der Strecke s .

P 3 M 2

10. Die Abbildung zeigt ein rechteckiges Zierfenster mit Bleiverglasung.



- Klaus gibt für die Berechnung der Länge l des äußeren Rahmens folgende Gleichung an:
 $l = a + b + c + d + e + f$
 Ina rechnet nach folgender Formel:
 $l = 2(a + b)$
 Beurteile beide Lösungsansätze.
- Für die Berechnung der Länge s der kürzeren inneren Strebe geben Klaus und Ina jeweils folgende Gleichungen an:
 Klaus: $s = e + f$
 Ina: $s = e^2 + f^2$
 Beurteile die Lösungsansätze von Klaus und Ina.

P 3 M 2

Anforderungsbereich 2

11. Bestimme die Lösungsmenge folgender Gleichungen und kontrolliere das Ergebnis.

a) $4,4 - 0,8(6 - 3x) = 9 - 3(0,6x + 2,6)$ b) $21 \cdot \frac{3}{x} = 18$

Gym c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{1} = 0$ d) $\frac{5}{1-t} = \frac{-5}{t-1}$

P 3, P 4

12. Löse die Gleichungen für den Variablengrundbereich R.
Wie ändert sich ggf. die Lösungsmenge der Gleichungen, wenn der Variablengrundbereich N ist?

a) $1,2u + 2,8 = 7,6$ b) $0,4 - 2r = 9,2$ c) $\frac{1}{4}z + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

P 3 M 1

13. Ermittle Lösungen folgender Gleichungen, ggf. auch näherungsweise.

a) $x \cdot y = -2$ b) $10^x = 50$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{4}$
d) $|x| - 6 = 0$ e) $3,1^x = 7$ f) $\sqrt{x} = 5$

P 3

14. Welche natürlichen Zahlen erfüllen die beiden folgenden Ungleichungen gleichzeitig?
Schreibe die Lösungsmenge auf.

(1) $\frac{a}{5} > 2,0$ (2) $\frac{a}{5} > 2,6$

P 3

15. Löse folgende Gleichungen. Fertige dazu jeweils eine Tabelle an und stelle die Lösungen im Koordinatensystem grafisch dar.

a) $40 = 2 \cdot (a + b)$ b) $2k - n = 10$ c) $0 \cdot x + 1 \cdot y = 1$

D 2

16. Beim Umstellen von Formeln nach einer Variablen sind Schülern Fehler unterlaufen.
Finde die Formel, die umgestellt wurde und ersetze die falsche Umstellung durch die richtige.

a) $s = \frac{v}{t}$ b) $I = U \cdot R$ c) $F_2 = F_1 \cdot \frac{l_2}{l_1}$ d) $h = \frac{A_G}{V}$

P 3, P 6 M 1

17. Gegeben ist die Ungleichung $0,6 - 3 \left(0,5 w - \frac{1}{2} \right) - w < 0,6$.

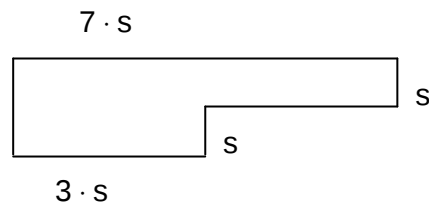
- a) Gib die Lösungsmenge der Ungleichung für den Grundbereich $\mathbb{Z}$ an.
b) Begründe, dass nicht alle natürliche Zahlen die Ungleichung erfüllen.

Gym

P 3

A2, A 4

18. Gegeben ist ein Sechseck. Sein Umfang beträgt 9 cm.



- a) Gib für die Berechnung des Flächeninhalts des Sechsecks eine Gleichung unter Verwendung der Variablen s an.
b) Berechne den Flächeninhalt des Sechsecks.

P 3

M 2

19. Eine aus dem Altertum überlieferte Aufgabe:
Ein reicher Athener ließ zu einem Gastmahl 13 Ochsen und 31 Schafe schlachten. Der Preis für alle Schlachttiere betrug 166 Drachmen. Ein Ochse ist um 6 Drachmen teurer als ein Schaf.

- a) Wie viel Drachmen kostet ein Schaf und wie viel ein Ochse?
b) Stelle für den Sachverhalt eine Gleichung auf, die nur eine Variable enthält.

P 3

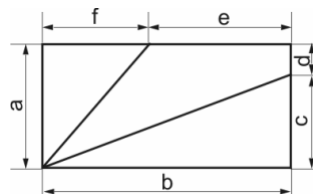
M 2

20. Untersuche folgende Aussage und begründe das Vorgehen:
„Es gibt ein chemisches Element, von dem 6 kg in ein 0,5 l-Gefäß eingefüllt werden können.“

P 1

A 4

21. Die Abbildung zeigt ein rechteckiges Zierfenster mit Bleiverglasung. Die Streckenlängen a , b , c , d , e und f seien bekannt.



Zur Berechnung der Gesamtlänge g der Bleifassungen (äußerer Rahmen und innere Streben) hat Franziska folgende Gleichung aufgestellt:

$$g = 2(a + b) + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + f^2}.$$

Wie kann sie darauf gekommen sein?

Warum treten die gegebenen Größen d und e nicht auf?

P 3

M 2

Anforderungsbereich 3

22. Gegeben sind die Gleichungen:

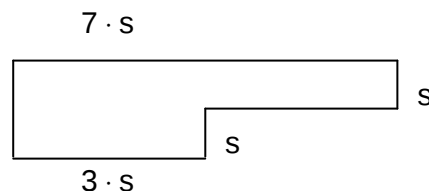
(1) **6,8** – 5x = 5x – 9,2 – 2x

(2) 2,5 (x – 1,4) = 3,5 (5,2 – 1,4x) – **6,9**

- a) Löse diese Gleichungen.
 b) Ändere danach die fettgedruckte Zahl jeweils so, dass
 (I) ein echter Bruch (II) eine negative Zahl
 als Lösung entsteht.

P 3

23. Gegeben seien ein Sechseck und die Terme $10s^2$ und $18s$.
 Untersuche, welche Zusammenhänge jeweils zwischen den Termen und dem Sechseck bestehen.



M 4

D 4

24. Aus einem Würfel entstehe wie folgt gedanklich ein Quader:
 Zwei seiner Kanten werden um 2 cm verkürzt. Die dritte Kante wird um 15 cm verlängert. Das Volumen des entstandenen Quaders ist um 12 cm^3 größer als das des Würfels.

- a) Ermittle, welches Volumen der Würfel hatte.
 b) Stelle für diesen Sachverhalt eine Gleichung auf, die nur eine Variable enthält.

P 3

M 2

25. Private Haushalte müssen für ihren Stromverbrauch einen Arbeitspreis nach dem tatsächlichen Stromverbrauch und einen Servicepreis als festes monatliches Entgelt (für die Bereitstellung der Messtechnik, für die Wartung der Technik sowie für Abrechnungsleistungen) zahlen.
 Es soll ein Vergleich folgender Tarife vorgenommen werden.

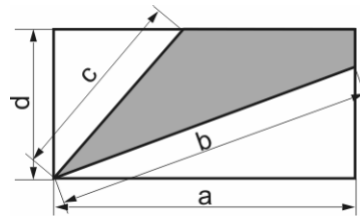
Tarif	Arbeitspreis	Servicepreis
Spar+	15,80 ct/kWh	6,50 €
enviaM single	16,97 ct/kWh	5,50 €

- a) Gib für den Vergleich dieser Tarife eine Ungleichung an, löse die Ungleichung und interpretiere das Ergebnis.
 b) Erkundige dich nach aktuellen Tarifen.

P 4

M 1

26. Die Abbildung zeigt ein rechteckiges Zierfenster mit Bleiverglasung, von dem die Längen der Streben a , b , c , d gegeben seien.



Zur Berechnung des Inhalts A der schraffierten Fläche hat Sophie folgende Gleichung aufgestellt: $A = a \cdot d - \frac{1}{2} d \sqrt{c^2 - d^2} - \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - a^2}$.

Wie kann sie darauf gekommen sein?

P 3

M 2

3.3 Zuordnungen und Funktionen

Anforderungsbereich 1

1. Carl hat für 5 kg Äpfel 6,00 € bezahlt. Susanne will von der gleichen Sorte 3,5 kg Äpfel kaufen. Wie viel muss sie bezahlen?

P 3

2. Beim Einsatz acht gleich starker Pumpen kann ein Schwimmbecken in 18 Stunden leer gepumpt werden.
- Wie lange dauert das Entleeren, wenn nur eine Pumpe zum Einsatz kommt?
 - Wie viele Pumpen müssen eingesetzt werden, wenn das Becken nach 4,5 h leer sein soll?

P 1

3. Gegeben ist die Wertetabelle für eine lineare Funktion.

x	-1	0	1		4	
y	-5	-2		4		17,5

- Stelle diese Funktion grafisch dar.
- Ergänze die Wertetabelle und bestimme die Funktionsgleichung.
- Gib für diese Zuordnung eine Wortvorschrift an.

P 3

D 2

4. Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von 20 cm². Welche Seitenlängen sind für dieses Rechteck möglich?
- Stelle dazu eine Wertetabelle mit 6 Wertepaaren auf und trage sie in ein Koordinatensystem ein.
 - Beschreibe den Graphen.
 - Ergänze:
Je länger die eine Seite ist, umso
Wenn man die eine Seite verdoppelt, so
.....

D 2

5. Stelle die folgenden linearen Funktionen f_1 und f_2 jeweils in ein und demselben Koordinatensystem grafisch dar. Beschreibe die Lage der Geraden zueinander. Berechne jeweils die Nullstellen von f_1 und f_2 .

- $f_1: y = \frac{3}{4}x$ und $f_2: y = -\frac{3}{4}x$
- $f_1: y = 3x - 1$ und $f_2: y = 3x + \frac{1}{2}$
- $f_1: y = 2,5$ und $f_2: y = -1\frac{1}{4}$
- $f_1: y = 2x + 1$ und $f_2: y = -2x + 1$

D 2

6. Zwei Klassen mit insgesamt 55 Schülern mieten für eine Klassenfahrt einen Bus. Dadurch entstehen für jeden Schüler Fahrkosten von 34 €. Was kostet die Busfahrt pro Schüler, wenn nur 50 Schüler an der Klassenfahrt teilnehmen?

P 3

7. Entscheide, ob die Zuordnungen proportional, indirekt proportional oder keines von beiden sind.

Zuordnungen	proportional	indirekt proportional	keines von beiden
Benzinmenge in Liter $\rightarrow$ Preis in Euro			
Anzahl von gleichlangen Teilstrecken auf einem Maßband $\rightarrow$ Länge der Teilstrecken des Maßbandes			
Größe eines Körpers $\rightarrow$ Masse des Körpers			
Länge einer Lok einer Modelleisenbahn $\rightarrow$ Originallänge der Lok			
Anzahl der Monate $\rightarrow$ Stromverbrauch			
Durchschnittsgeschwindigkeit eines Fahrzeuges $\rightarrow$ Zeit, die das Fahrzeug für eine Strecke von 100 km benötigt			

A 1

8. Die gegebenen Sachverhalte können jeweils durch die Funktionsgleichung $y = mx + n$ dargestellt werden.

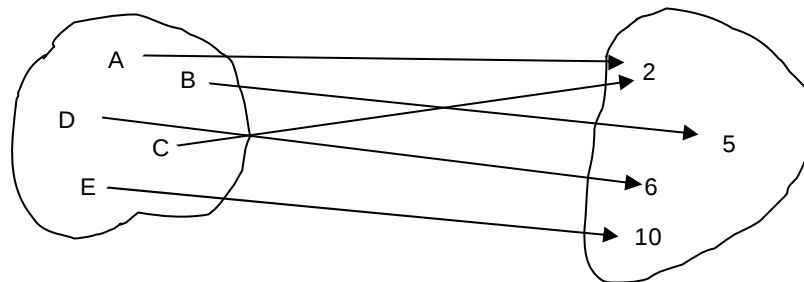
Gib für jeden Sachverhalt an, was die Variablen y , m , x und n bedeuten.

- (1) Eine Rechnung einer Telefongesellschaft enthält die Kosten für den Telefonanschluss (monatlich 12,30 €) sowie die Gebühren für die geführten Gespräche (pro Einheit 0,06 €)
- (2) Ein Taxifahrer berechnet den Fahrpreis aus dem Grundpreis 1,90 € und dem Preis für jeden gefahrenen Kilometer (0,85 €/km)
- (3) Die Preise einer Fahrschule setzen sich aus einem Grundpreis für die theoretische Ausbildung (114,00 €), einer Prüfungsgebühr (94,00 €) und dem Preis für die Fahrstunden (pro Stunde 17,50 €) zusammen.

M 4

9. Untersuche, welche der folgenden Zuordnungen keine Funktionen darstellen. Begründe.

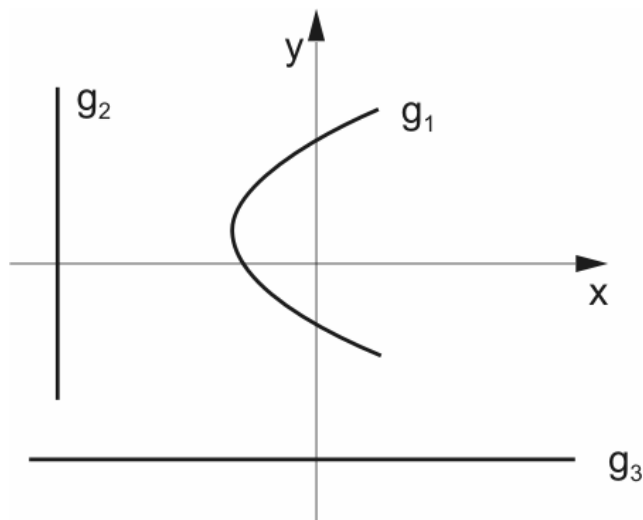
a)



b)

u	2	3	5	5	7	9
v	4	7	1	3	3	6

c)



A 1 D 2

10. Gegeben sind die linearen Funktionen f_1 und f_2 durch die Gleichungen $f_1(x) = -x + 3,5$ und $f_2(x) = \frac{5}{3}x - 0,5$ sowie der Punkt $S(1,5; 2)$.

Begründe auf verschiedene Weise, dass S der Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 ist.

A 4

Anforderungsbereich 2

11. Familie Meier plant eine siebentägige Urlaubsfahrt mit einem Wohnmobil. Dazu holt sie sich drei Angebote von Verleihfirmen ein. Die Angebote lauten:
 Firma A: 25 € pro Tag zuzüglich 0,20 € pro gefahrene Kilometer
 Firma B: 30 € pro Tag zuzüglich 0,15 € pro gefahrene Kilometer
 Firma C: 45 € pro Tag zuzüglich 0,10 € pro gefahrene Kilometer
- Von welcher Firma sollte sich Familie Meier das Wohnmobil ausleihen, wenn die Reise ca. 1500 km lang ist?
 - Für welche Streckenlängen sind die beiden anderen Firmen am billigsten?
 - Stelle den Zusammenhang von gefahrenen Kilometern und Gesamtkosten tabellarisch für eine Streckenlänge von 0 km bis 1000 km in Schritten von 100 km für die Firmen A und B dar.
 - Stelle den Sachverhalt aus c) in ein und demselben Koordinatensystem dar. Was lässt sich aus der grafischen Darstellung ablesen?

M 1

D 2

12. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -4x + 2$.
 Gib eine Gleichung für eine Funktion an, deren Graph
- parallel zum Graphen von f verläuft
 - die y -Achse im gleichen Punkt wie der Graph von f schneidet
 - die x -Achse im gleichen Punkt wie der Graph von f schneidet
 - durch Spiegelung an der x -Achse aus dem Graphen von f hervorgeht.

M 2

13. Gegeben sind lineare Funktionen mit folgenden Eigenschaften:
- Der Graph verlaufe durch den Ursprung des Koordinatensystems und durch den Punkt $A(3; 4)$.
 - Der Graph der linearen Funktion mit $y = 2x + b$ verlaufe durch den Punkt $A(4; 9)$.
 - Der Graph der linearen Funktion mit $y = ax + 3$ verlaufe durch den Punkt $C(2; 5)$.
 - Der Graph verläuft durch die Punkte $D(2; 1)$ und $E(-2; -3)$.
- Ermittle jeweils die zugehörige Funktionsgleichung und kontrolliere grafisch.

Gym P 4

14. Ein Glaszylinder ist bis zu einer Höhe von 50 cm mit einer öligen Flüssigkeit gefüllt. Lässt man eine Stahlkugel in den Zylinder fallen, so sinkt sie mit einer gleichbleibenden Geschwindigkeit von $3,2 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

- a) Ergänze die Wertetabelle.

t in s	1	2	5	10	15
s in cm					

- Nach welcher Zeit kommt die Kugel auf dem Boden des Zylinders an?
- Stelle den Sachverhalt in einem Koordinatensystem grafisch dar.
- Beschreibe den Sachverhalt mit Hilfe einer Funktionsgleichung.

M 1

D 2

15. Ein Wasserbehälter ist 8,00 m hoch, aber nur bis zu einer Höhe von 2,00 m gefüllt. Wenn man ihn nun auffüllt, steigt der Wasserstand je Stunde um 0,50 m.
- Wie hoch ist der Wasserstand nach 180 Minuten?
Wie viel Zeit vergeht, bis der Behälter dreiviertel gefüllt ist?
 - Beschreibe die in diesem Sachverhalt enthaltene Zuordnung.
 - Gib für diese Zuordnung eine Gleichung, den Definitionsbereich sowie den Wertebereich an und stelle sie grafisch dar.

M 1

A 4

16. Untersuche, ob folgende Zuordnungen mithilfe der Gleichung $y = m \cdot x$ dargestellt werden können. Gib jeweils an, was x und y bedeuten.

Zuordnung	Bedeutung von y	Bedeutung von x	Durch $y = m \cdot x$ darstellbar? Begründung
Länge der Parkzeit → Höhe der Parkgebühren			
Betriebsdauer eines Gerätes → Höhe der Energiekosten			
Flugstrecke → Flugzeit			
Paketgewicht → Höhe der Gebühr			

M 4

17. Untersuche, ob folgende Sachverhalte durch einen linearen funktionalen Zusammenhang der Form $y = mx + n$ dargestellt werden können und gib ggf. jeweils m und n an.
- Der Umfang eines Kreises in Abhängigkeit von seinem Radius.
 - Der Flächeninhalt eines Kreises in Abhängigkeit von seinem Radius.
 - Der Umfang eines Rechtecks in Abhängigkeit von seinen Seitenlängen.
 - Das Volumen einer Kugel in Abhängigkeit von ihrem Radius.
 - Der Flächeninhalt eines Quadrates in Abhängigkeit von einer seiner Seitenlängen.
 - Die Größe des Winkels α im rechtwinkligen Dreieck ABC (mit dem rechten Winkel bei C) in Abhängigkeit von der Größe des Winkels β .

M 4

18. Wie oft können Gefäße mit einem Fassungsvermögen von 1 Liter (0,5 Liter; 0,4 Liter; 0,25 Liter; 0,1 Liter und 0,05 Liter) mit zwei Litern Wasser gefüllt werden? Gib dazu eine Tabelle sowie eine Gleichung an und beschreibe die Zuordnung.

M 1

19. a) Ein Rechteck habe einen Umfang von 20 cm. Wie muss man die Seitenlängen des Rechtecks wählen, um einen maximalen Flächeninhalt zu erhalten? Begründe.
- b) Untersuche, welches Rechteck unter allen Rechtecken mit gleichem Umfang den größten Flächeninhalt hat.

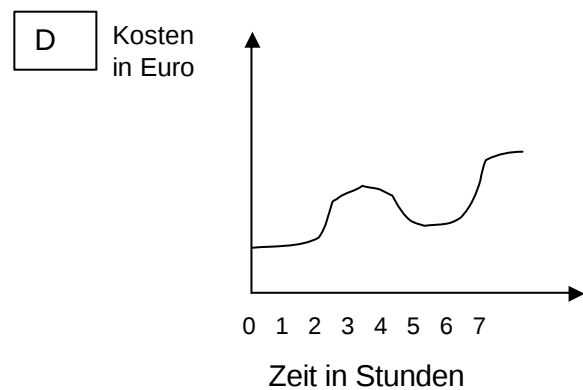
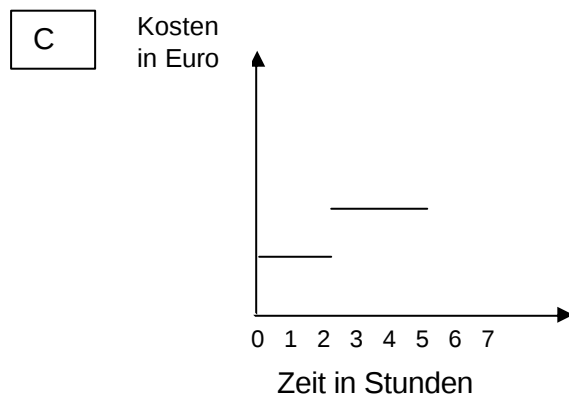
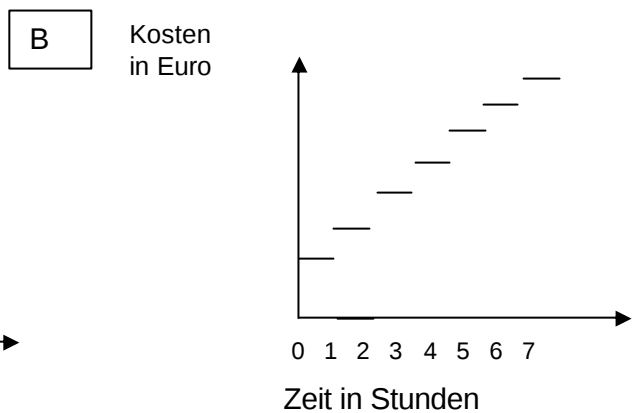
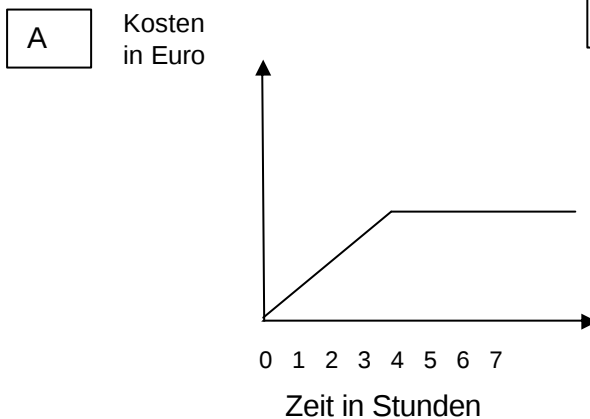
Gym

A 3

20. Gegeben ist die lineare Funktion f_1 mit $y = f_1(x) = \frac{4}{3}x - 1,5$ sowie der Punkt $S(3; 2,5)$.
 Ermittle die Gleichung einer linearen Funktion f_2 , so dass S der Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_2 ist.
 Begründe deinen Lösungsweg.
 Äußere dich zur Behauptung, dass die Aufgabe genau eine Lösung hat.

A 4

21. Eine Familie möchte im Urlaub eine Fahrradtour machen. Dazu muss sie sich Fahrräder ausleihen. Die erste Stunde kostet 3 € und jede weitere angefangene Stunde kostet 2 €.
 Begründe, welches der Diagramme diesen Sachverhalt darstellen könnte.



D 2

22. Der Graph der Funktion f mit $y = f(x) = -2x - 4$ schneidet die x -Achse im Punkt A und die y -Achse im Punkt B . Der Koordinatenursprung O sowie die Punkte A und B bilden das Dreieck ABO .
 Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks ABO .

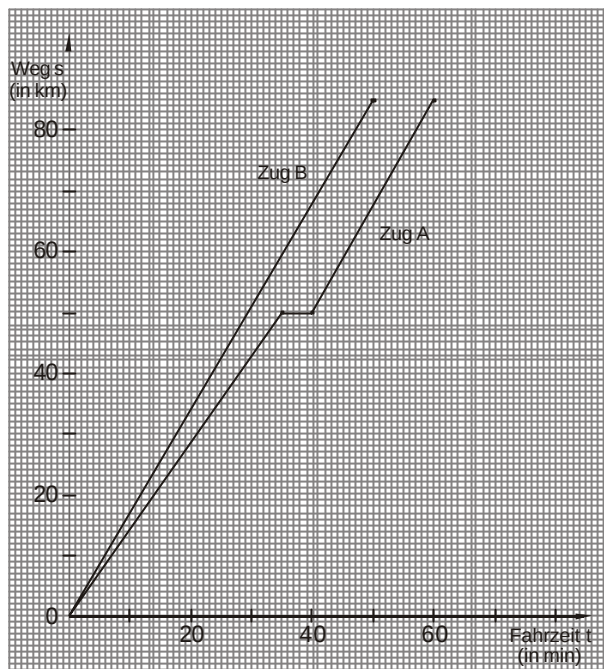
P 1, P 3

23. Zu folgender Aufgabe ist die darunter stehende Schülerlösung gegeben. Beurteile diese Schülerlösung und gib gegebenenfalls eine korrigierte und verbesserte Lösungsdarstellung an.

Die Bahn setzt auf der Strecke von Magdeburg nach Halle unter anderem durchgehende InterCity-Züge und InterCity-Züge mit Halt in Köthen ein.

Das nebenstehende Bild zeigt ein Weg-Zeit-Diagramm von zwei solchen InterCity-Zügen A und B, wobei jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit zugrunde gelegt ist.

Entscheide mithilfe dieses Diagramms, welcher InterCity-Zug in Köthen hält. Begründe die Entscheidung.



Ein Schüler hat die Aufgabe so gelöst:

Der Zug A führt nach Köthen, weil er im Diagramm nach rechts abweicht und dadurch noch einen Umweg macht.

D 4, D 5

Anforderungsbereich 3

24. Durch folgende Zuordnung ist eine Funktion gegeben: Jeder reellen Zahl x wird die größte ganze Zahl zugeordnet, die kleiner oder gleich x ist. Man schreibt dafür: $y = \lfloor x \rfloor$.

a) Vervollständige die Tabelle und ergänze weitere Wertepaare.

x	2,3	3,54	5	0,72	-0,77	0	π
$\lfloor x \rfloor$							

- b) Stelle diese Funktion im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ grafisch dar.
c) Ermittle die Nullstellen von $y = \lfloor x \rfloor$.

P 1

A 1

D 2

25. Ermittle die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $f(x) = |x|$ und $g(x) = 0,5x + 2$
- a) zeichnerisch,
b) rechnerisch.

Gym M 3 D 2

26. Gegeben ist eine Funktion g mit $y = g(x) = 0,5x - 1$.
Wähle folgende Definitionsbereiche a) $DB_g = \mathbb{N}$ b) $DB_g = \mathbb{Z}$ c) $DB_g = \mathbb{R}$
und stelle die drei Funktionen im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ grafisch dar.
Erläutere, wie sich die unterschiedlichen Definitionsbereiche auf den Graphen auswirken.

A 1 D 3

27. Gegeben sind die linearen Funktionen f mit $y = f(x) = x - 1$ und g mit $y = g(x) = -x + 5$.
Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse im Punkt A und der Graph der Funktion g die y -Achse im Punkt B . Beide Graphen schneiden sich im Punkt S .
Berechne den Flächeninhalt und den Umfang des Dreiecks ABS .

Gym P 1, P 3

28. Ein quaderförmiges Schwimmbecken ist 25,00 m lang, 8,00 m breit und 2,00 m tief.
Beim Befüllen dieses Beckens steigt der Wasserstand je Stunde um 0,05 m an.
- a) Ermittle die Zeitdauer, in der das Becken bis 10 cm unter dem Rand gefüllt ist.
b) Beschreibe den Zusammenhang „Wassermenge im Schwimmbecken (in m^3) in Abhängigkeit von der Zeit (in h)“ durch eine lineare Funktion.
c) Welche Abmessungen könnte die Grundfläche eines Schwimmbeckens auch haben, wenn alle anderen vorstehend genannten Aussagen erfüllt bleiben sollen?
Äußere dich, inwieweit diese möglichen Abmessungen mit Vorstellungen aus dem Erfahrungsbereich übereinstimmen.

M 2, M 3

29. Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = m_1x + n_1$ und die lineare Funktion f mit $f(x) = m_2x + n_2$, wobei $m_1 \neq m_2$.
Untersuche, welche Bedingungen für m und n gelten müssen, damit der Schnittpunkt der Graphen beider Funktionen jeweils auf einer Koordinatenachse liegt.
Überprüfe an einem selbstgewählten Beispiel die Richtigkeit der Bedingungen für m und n .

A 4

30. Zu folgender Aufgabe ist die darunter stehende Schülerlösung gegeben. Beurteile diese Schülerlösung und gib gegebenenfalls eine korrigierte und verbesserte Lösungsdarstellung an.

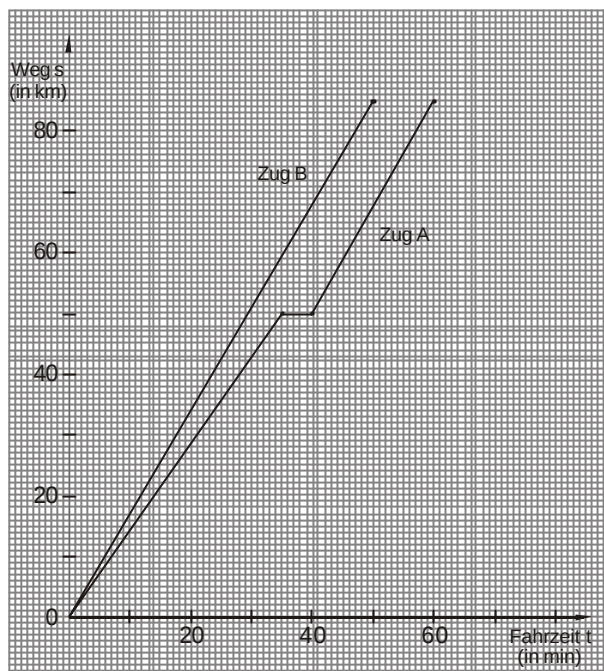
Die Bahn setzt auf der Strecke von Magdeburg nach Halle unter anderem durchgehende InterCity-Züge und InterCity-Züge mit Halt in Köthen ein.

Das nebenstehende Bild zeigt ein Weg-Zeit-Diagramm von zwei solchen InterCity-Zügen A und B, wobei jeweils die Durchschnittsgeschwindigkeit zugrunde gelegt ist.

Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit des Zuges B (in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$).

Das Weg-Zeit-Diagramm des Zuges B liegt auf einer Geraden (siehe Bild)

Gib für diese Gerade eine Gleichung an.



Ein Schüler hat die Lösung dieser Aufgabe so dargestellt:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = 15 \text{ km} = 15000 \text{ m}$$

$$t = 50 \text{ min} = 3000 \text{ s}$$

$$v = \frac{15000 \text{ m}}{3000 \text{ s}}$$

$$v = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 18,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v = 3,6$$

$$v = 101,88 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Der Zug B fährt mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von $101,88 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

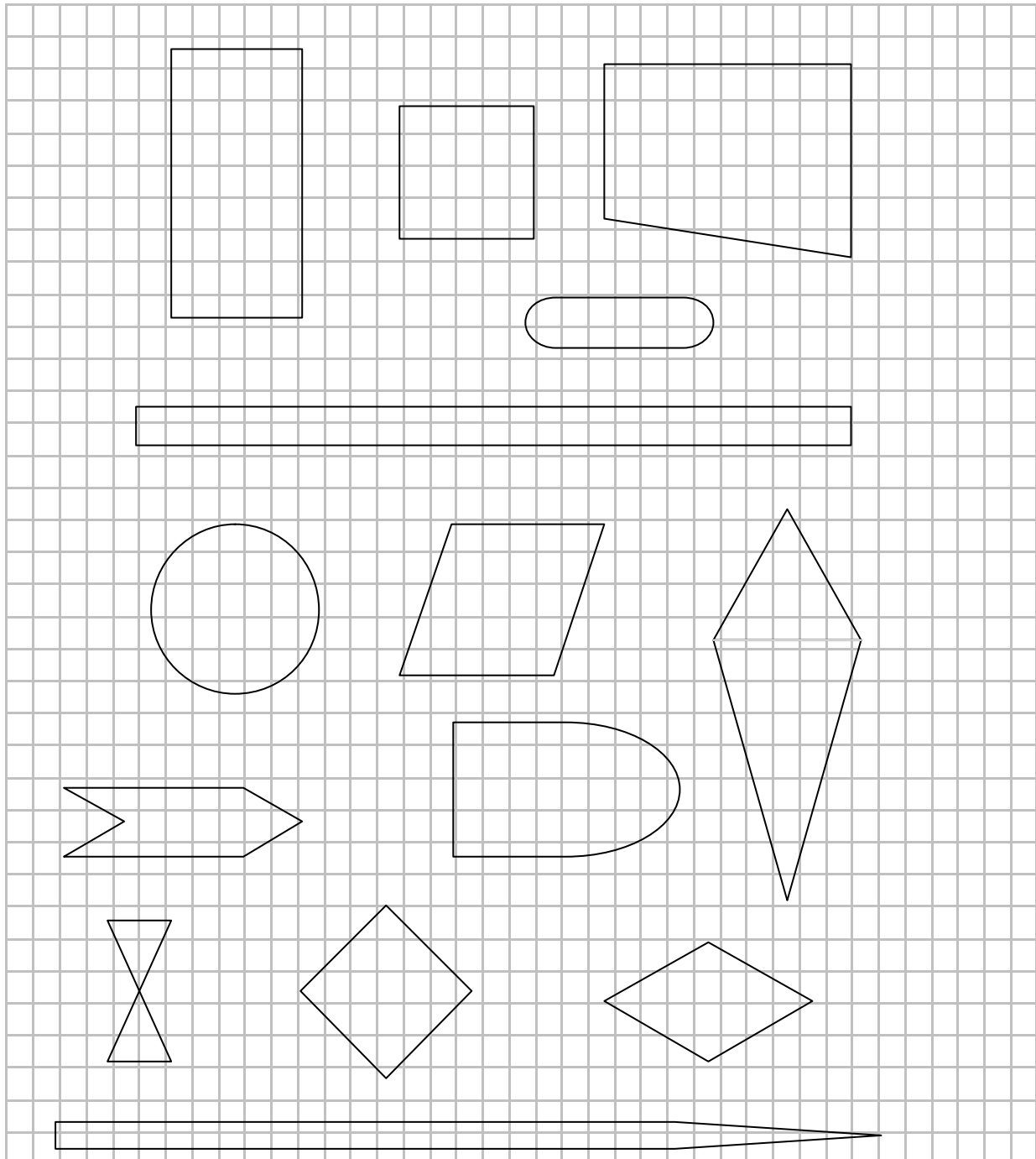
Zug = x + y

D4, D 5

3.4 Geometrie

Anforderungsbereich 1

1. Gegeben seien die abgebildeten Figuren.



Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (1) Unter den Figuren ist kein Trapez.
- (2) Genau zwei Quadrate sind dargestellt.
- (3) Mindestens vier der dargestellten Figuren sind Rhomben.
- (4) Jede der dargestellten Figuren mit (wenigstens) zwei zueinander parallelen Seiten ist ein Trapez.

A 1

D 1, D 5

2. Gegeben sei ein Dreieck ABC mit üblicher Bezeichnung. Die Seite b des Dreiecks sei 3 cm lang.
Wie weit ist dann der Eckpunkt C vom Punkt A entfernt?
- (1) mehr als 3 cm
 - (2) genau 3 cm
 - (3) weniger als 3 cm

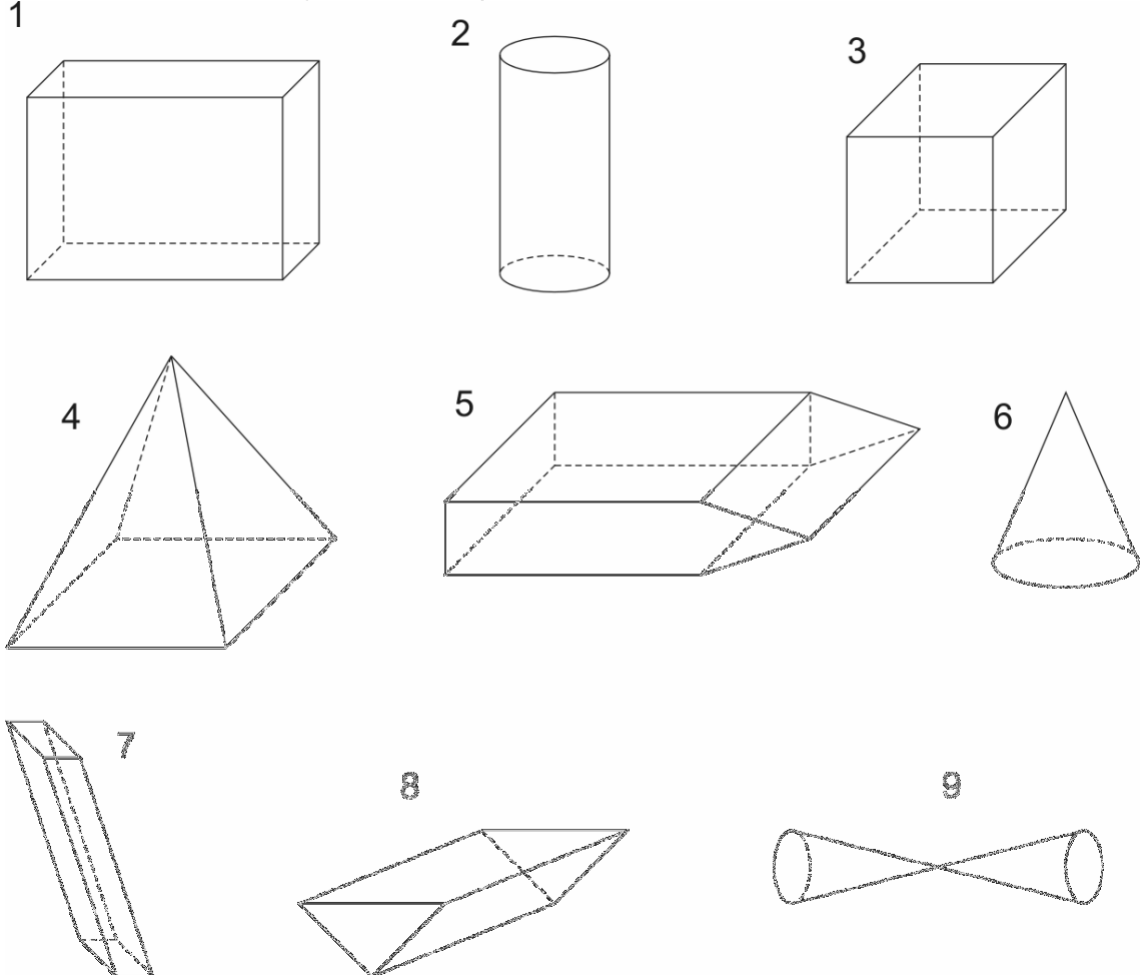
P 1

3. Drei Punkte A, B und C sollen so in der Ebene liegen, dass jeder Punkt von jedem der anderen Punkte 2 cm entfernt liegt.
Welche der folgenden Aussagen ist dann in jedem Falle richtig? Begründe.
- (1) Der Punkt A liegt 2 cm entfernt von der durch B und C bestimmten Geraden.
 - (2) Die drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck.
 - (3) Die Punkte B und C liegen auf einem Kreis um den Punkt A mit dem Radius 2 cm.

P1

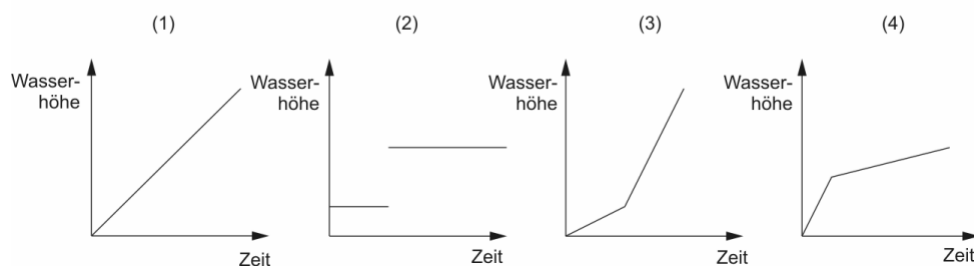
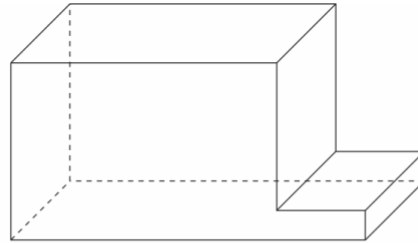
A 3

4. Gib an, welche der dargestellten Körper Prismen sind.



D 1

5. Die Zeichnung soll ein Schwimmbecken darstellen. In dieses Becken wird gleichmäßig Wasser eingelassen. Während das Wasser einfließt, gehört zu jedem Zeitpunkt eine ganz bestimmte Höhe des Wasserspiegels. Welcher der Graphen (1) bis (4) passt dazu? Begründe.

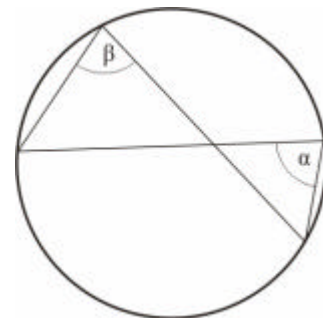


M 1

D 2

6. Welcher Satz aus der Geometrie ist hier dargestellt worden?
Kreuze an und formuliere den Satz.

- ☐ Innenwinkelsatz im Dreieck
☐ Peripheriewinkelsatz am Kreis
☐ Sehnensatz am Kreis
☐ Satz des Thales

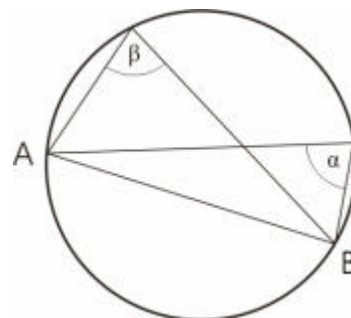


A 2

7. Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck DEF mit dem rechten Winkel beim Punkt F. Berechne die Länge der dem Punkt F gegenüberliegenden Seite f, wenn die beiden anderen Seiten 9 cm bzw. 12 cm lang sind.

P 1, P 3

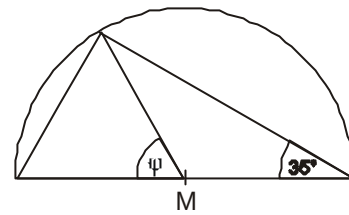
8. Der Winkel α betrage 67° .
Gib an, wie groß dann der Winkel β ist und begründe.



P 1

A 3

9. Gegeben ist folgende Aufgabe:
Ermittle die Größe des Winkels φ (siehe Bild).



Ein Schüler hat die Lösung dieser Aufgabe so dargestellt:



Beurteile die Lösungsdarstellung.

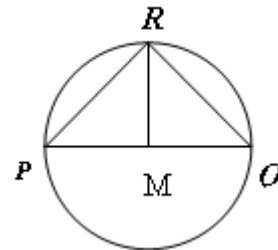
Berücksichtige dabei, dass Lösungswege stets erkennbar und nachvollziehbar darzustellen sind.

Gib gegebenenfalls eine verbesserte Lösungsdarstellung an.

D 4, D 5

Anforderungsbereich 2

10. Gegeben sei ein Dreieck PQR entsprechend nebenstehender Abbildung. Vervollständige die Tabelle durch Angabe der jeweils fehlenden Werte.



	$\overline{PQ}$	$\overline{QR}$	$\overline{PR}$	$\overline{MR}$	$\angle PQR$	$\angle QPR$	$\angle QRP$	A_{PQR}
a)	64 cm							
b)								72 cm ²

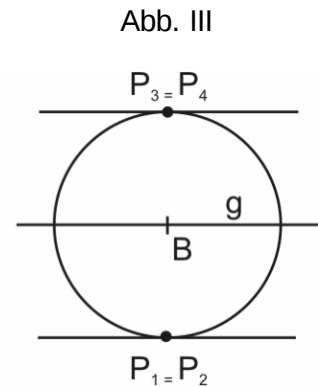
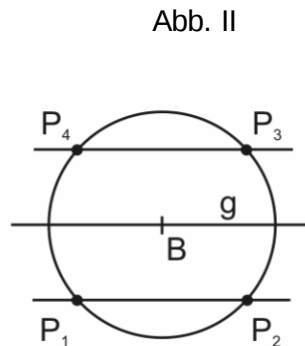
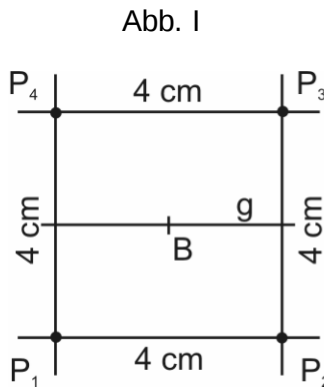
P 1, P 3 M 1

11. Gegeben sei ein Punkt A. Drei weitere Punkte B, C und D sollen ein jeder im Abstand von 2 cm zu A liegen.
Welche der folgenden Aussagen kann dann zutreffen? Begründe.
- (1) Die drei Punkte B, C und D liegen auf ein und derselben Geraden, die 2 cm von A entfernt ist.
 - (2) Die drei Punkte B, C und D bilden ein Dreieck, auf dessen Seite $\overline{BC}$ der Punkt A liegt.
 - (3) Die drei Punkte B, C und D liegen auf ein und demselben Kreis um A, dessen Radius 2 cm beträgt.
 - (4) Die drei Punkte B, C und D liegen auf ein und derselben Kugel um A, deren Radius 2 cm beträgt.

P 1 A 3

12. Auf einer Geraden g liege ein Punkt B . Durch Konstruktion sollen alle die Punkte ermittelt werden, die von B den Abstand 3 cm haben und 2 cm von der Geraden g entfernt liegen.

Welche der folgenden Zeichnungen kann die Lösung der Aufgabe sein?



(Abbildungen nicht maßstabsgerecht)

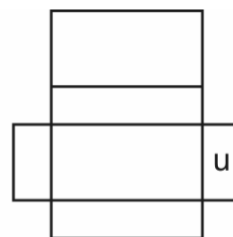
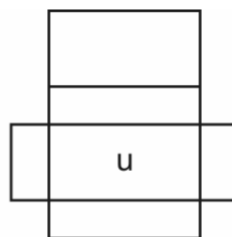
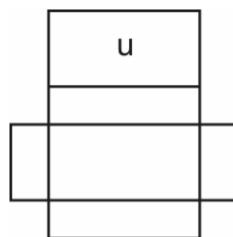
P 4 D 4

13. In den drei Quadernetzen ist jeweils eine Fläche des Netzes mit „u“ für „unten“ beschriftet worden. Falte den Körper in Gedanken zusammen und trage jeweils ein:

o für oben
v für vorn

h für hinten
r für rechts

l für links.

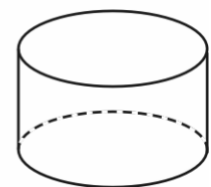


D 1

14. Welche Höhe muss der Zylinder II haben, damit er das gleiche Volumen hat wie Zylinder I? Ergänze den Wert von h_2 .



Zylinder I
 $r_1 = 5 \text{ cm}$
 $h_1 = 10 \text{ cm}$

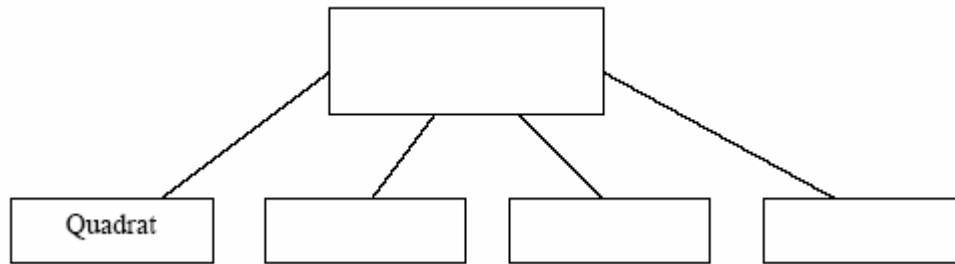


Zylinder II
 $r_2 = 10 \text{ cm}$
 $h_2 = \dots\dots\dots$

Radius der Grundfläche:
Höhe des Zylinders:

P 3 M 1

15. Finde einen übergeordneten Begriff und weitere Unterbegriffe.
Gib mehrere Möglichkeiten an.



M 1

16. Mit der Formel $A = \frac{a+c}{2} \cdot h$ kann man die Maßzahl des Flächeninhaltes eines Trapezes berechnen, wenn a bzw. c die Maßzahlen der parallelen Gegenseiten und h die Höhenmaßzahl des Trapezes ist.
Für welche Figuren könnte man die Maßzahl des Flächeninhaltes ebenfalls mit der genannten Formel berechnen? Begründe.

M 1

D 3

17. Drei Wassergefäße sollen die Form eines Quaders, eines Kreiszylinders bzw. eines Kreiskegels (Spitze nach unten) haben. Sie werden mit konstanter Zuflussgeschwindigkeit mit Wasser gefüllt.
Skizziere die Graphen der Füllhöhe in Abhängigkeit von der Zeit.

P 1

D 2

18. Bei einer geraden, regelmäßigen sechsseitigen Pyramide werde
a) der Inhalt der Grundfläche verdreifacht
b) die Höhe verdoppelt
c) der Radius des Umkreises der Grundfläche halbiert.
Wie ändert sich jeweils das Volumen der Pyramide?

P 1

M 1

19. Ein gleichschenkliges Dreieck wird an seiner Basis gespiegelt. Welche Figuren können dabei entstehen?

A: ein Quadrat

B: ein Parallelogramm

C: ein Drachenviereck

„Überprüfe“ deine Antwort durch Konstruktion.

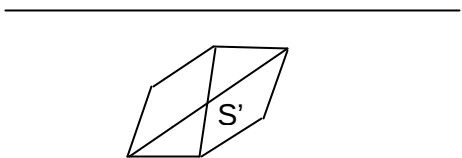
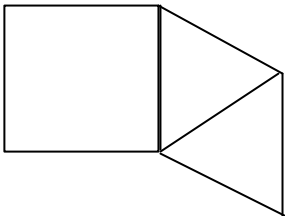
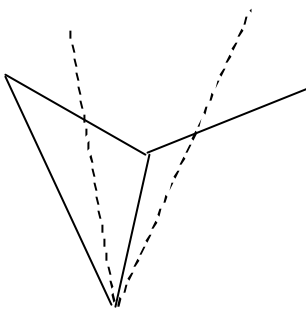
P 1, P 2

20. Ein Quader habe die Abmessungen 3 cm, 4 cm und 5 cm. Berechne die Länge der Flächendiagonalen und der Raumdiagonalen des Quaders.

P 1, P 3

M 2

21. Ergänze die Abbildungen, so dass es sich jeweils um die Darstellung einer n-seitigen Pyramide handelt.

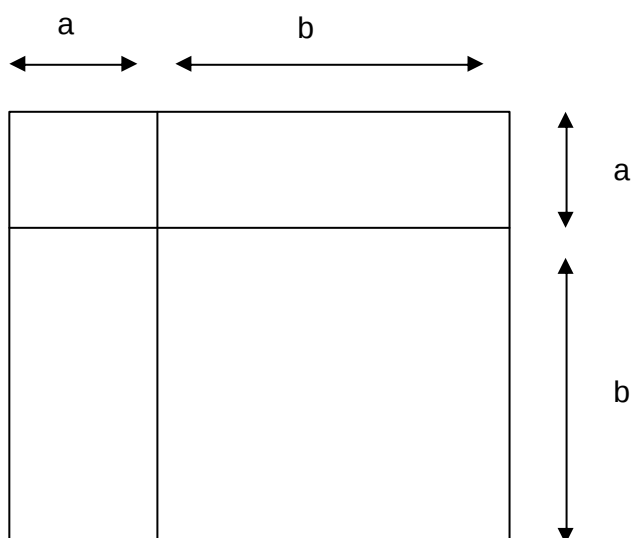
Grund- und Aufriss einer Pyramide (n = 6)	
Netz einer Pyramide (n = 4)	
Schrägbild einer Pyramide (n = 5)	

P 1

D 1

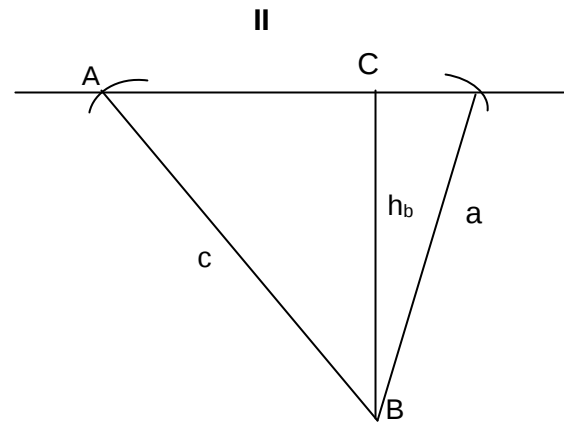
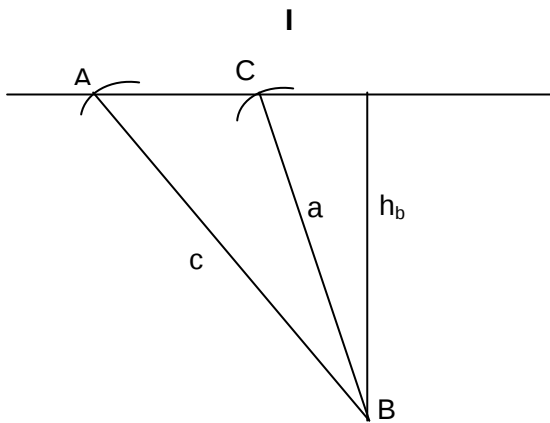
22. Der Flächeninhalt des großen Quadrates berechnet sich nach der Formel $(a + b)^2$. Ergänze die Gleichung durch die Summe der Flächeninhalte der Vierecke, aus denen sich das große Quadrat zusammensetzt.

$(a + b)^2 = \dots\dots\dots$



M 2

23. Von einem Dreieck ABC üblicher Bezeichnung sind folgende Stücke gegeben:
 $a = 4 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$, $h_b = 3 \text{ cm}$.
 Zwei Vorschläge werden für eine Konstruktion des Dreiecks durch die folgenden Abbildungen unterbreitet.
 Was meinst du dazu?

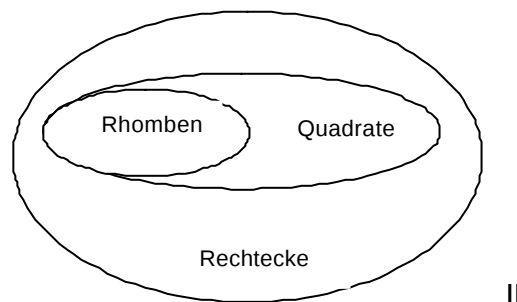
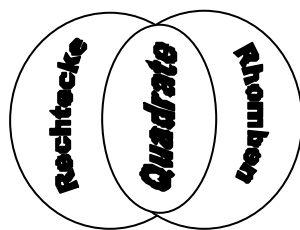
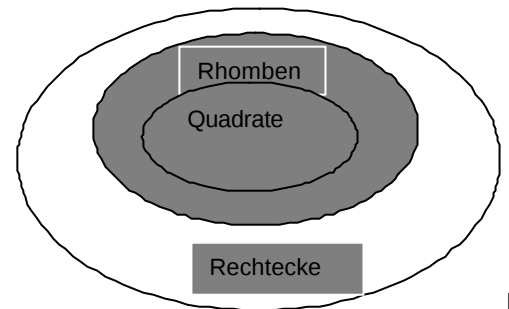


P 5

A 5

D 5

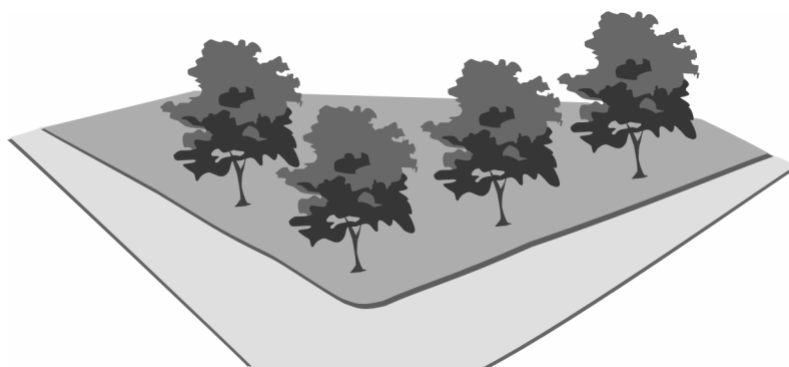
24. Die Mengendiagramme I bis III sollen die „verwandtschaftlichen“ Beziehungen zwischen Quadraten, Rechtecken und Rhomben darstellen.
 Entscheide, welche der drei Darstellungen richtig ist und ergänze diese Darstellung um die Parallelogramme.



M 1

D 3, D 5

25. Zu sehen ist eine Baumgruppe an einer Wegekreuzung.

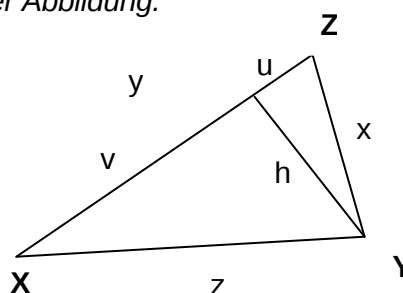


Markiere am Rande der Darstellung durch einen Pfeil die Blickrichtung, aus der man die Baumgruppe wie nebenstehend abgebildet sehen kann.



D 1

26. Gegeben sei ein Dreieck XYZ entsprechend der Abbildung.



Kreuze von den folgenden Aussagen jeweils an, ob sie wahr oder falsch sind und begründe.

Wenn im Dreieck XYZ der Winkel $\angle XYZ = 90^\circ$ ist, dann gilt: $x^2 + z^2 = y^2$.

wahr falsch

☐
☐

Wenn $x + y > z$, dann ist das Dreieck rechtwinklig.

☐
☐

Wenn $x^2 + z^2 = y^2$, dann gilt auch $h^2 = u \cdot v$.

☐
☐

Gym

A 1

D 5

Anforderungsbereich 3

27. Bei einem Würfel werde durch einen Schnitt längs der Diagonalen zweier aneinander stoßender Seitenflächen eine Ecke abgeschnitten. Diese abgeschnittene Ecke soll *rechtwinklige Ecke* heißen.

a) Berechne die Inhalte der die rechtwinklige Ecke begrenzenden Seitenflächen.
 b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Inhalten der die rechtwinklige Ecke begrenzenden Seitenflächen?

P 2, P 3

D 4

28. Von einem Dreieck ABC mit üblicher Bezeichnungsweise seien gegeben:

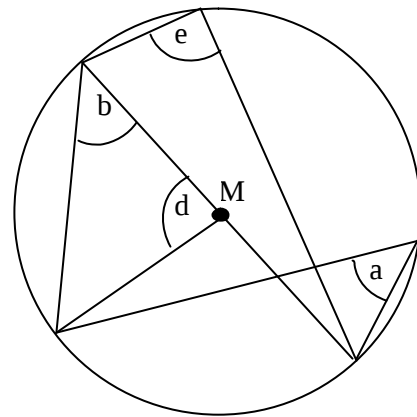
$$h_a = 5 \text{ cm} \quad h_b = 5,5 \text{ cm} \quad \beta = 60^\circ$$

Konstruiere das Dreieck ABC.

P 2

D 3

29. Ermittle die Größe der Winkel δ und ε , wenn gilt: $\alpha = 50^\circ$.
 Stelle deinen Lösungsweg dar und gib die von dir verwendeten Sätze an.



(Abbildung nicht maßstäblich)

P 1, P 3

D 3

30. Konstruiere eine Strecke von $\sqrt{11}$ cm Länge mit Zirkel und Lineal.

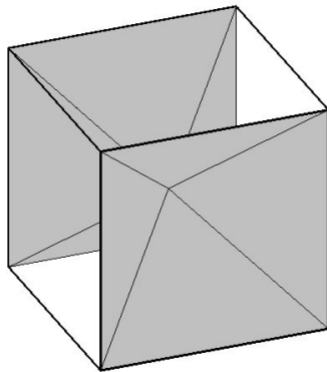
P 2, P 3

31. Beweise mithilfe der Formel für den Flächeninhalt eines Trapezes:

Wenn ein Trapez ein Quadrat ist, so gilt $A = a^2$.

A 6

32. Du siehst im Bild einen Würfel, der im Inneren von sechs zueinander kongruenten Pyramiden ausgefüllt ist.



Es gilt also

$$6 \cdot V_{\text{Pyr}} = V_{\text{W}} = a^3$$

oder auch

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot a$$

und deshalb allgemein

für jede Pyramide

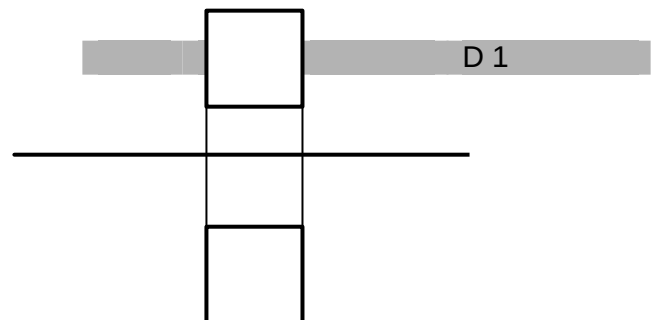
$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{6} \cdot A_g \cdot h$$

- a) Kommentiere die einzelnen Herleitungsschritte.
b) Beurteile das gefundene Ergebnis. Ist es richtig? Falls nicht, warum nicht?

A 3, A 5

- 33.

In der Abbildung siehst du Grund- und Aufriss eines Körpers bei senkrechter Parallelprojektion. Stelle solche Körper als Schrägbild dar.



3.5 Stochastik

Anforderungsbereich 1

1. Begründe, bei welchem der nachstehenden Vorgänge oder Versuche die Ergebnisse vom Zufall abhängen? Gib ggf. mögliche Ergebnisse an.
 - a) Würfeln mit einem „normalen“ Spielwürfel
 - b) Werfen einer Münze
 - c) Bewerten einer Klassenarbeit
 - d) Würfeln mit einem Würfel, bei dem sich auf jeder Seite 3 Augen befinden
 - e) Physikalisches Experiment zum Bestimmen der Dichte eines festen Körpers
 - f) Überprüfen der natürlichen Zahlen zwischen 50 und 100 auf Teilbarkeit durch 11

A 2

2. Ein Glücksrad hat 12 gleich große Felder. Diese sind fortlaufend von 1 bis 12 nummeriert. Das Glücksrad wird gedreht. Berechne die Wahrscheinlichkeit für das Stehen bleiben des Zeigers bei folgenden Feldern:
 - (1) Feld mit der Zahl 6
 - (2) Feld mit einer ungeraden Zahl
 - (3) Feld mit einer durch vier teilbaren Zahl
 - (4) Feld mit einer Zahl zwischen 6 und 7
 - (5) Feld mit einer Primzahl

P 1

3. Beim Zufallsversuch „dreifacher Münzwurf“ treten folgende Ergebnisse auf: WWW, WWZ, WZW, WZZ, ZWW, ZWZ, ZZW, ZZZ. (Z steht für **Z**ahl, W für **W**appen)
 - a) Gib alle Ergebnisse an, die zu folgenden Ereignissen gehören:
 - (1) genau zweimal Zahl
 - (2) mindestens zweimal Zahl
 - (3) höchstens zweimal Zahl
 - (4) weder Zahl noch Wappen
 - (5) mindestens einmal Zahl oder Wappen
 - b) Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse (1) bis (5).

A 1

4. Es wurden Zufallsexperimente „Werfen einer Reißzwecke“ durchgeführt. Die absolute Häufigkeit des Ereignisses „Reißzwecke liegt auf dem Rücken“ wurde ermittelt. Dabei entstand folgende Tabelle:

Anzahl der Würfe	10	50	100	250	500
Anzahl des Ereignisses „Rücken“	4	26	58	143	289

- a) Stelle die relative Häufigkeit des Auftretens des Ereignisses „Rücken“ in Abhängigkeit von der Anzahl der Würfe grafisch dar.
- b) Gib davon ausgehend Schätzwerte für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Reißzwecke liegt auf dem Rücken“ sowie „Reißzwecke liegt nicht auf dem Rücken“ an.

M 1

D 2

5. Aus einem Skatblatt mit 32 Karten, das gut gemischt wurde, werden ohne Zurücklegen zufällig zwei Karten gezogen. Ermittle mit einem Baumdiagramm die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zuerst das Herz-As und dann das Kreuz-As gezogen werden.

D 2

6. Gib Ereignisse an, die beim Würfeln mit einem Spielwürfel folgende Wahrscheinlichkeiten haben.

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) 0

M 3

7. Die Ergebnisse bei einer Klassenarbeit der Klasse 8 a führten zu folgendem Notenspiegel:

Zensur	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	7	8	7	3	2

- a) Berechne den Klassendurchschnitt.
b) Stelle diese Tabelle in einem Säulendiagramm und in einem Kreisdiagramm dar.

D 2

Anforderungsbereich 2

8. Beim Zufallsversuch „dreifacher Münzwurf“ treten folgende Ergebnisse auf: WWW, WWZ, WZW, WZZ, ZWW, ZWZ, ZZW, ZZZ. (Z steht für **Z**ahl, W für **W**appen)
- a) Gib alle Ergebnisse an, die zu folgenden Ereignissen gehören:
- (1) genau zweimal Zahl
 - (2) mindestens zweimal Zahl
 - (3) höchstens zweimal Zahl
 - (4) weder Zahl noch Wappen
 - (5) mindestens einmal Zahl oder Wappen
- b) Beschreibe die Gegenereignisse zu den Ereignissen (1) bis (5) sowohl durch die Angabe der zugehörigen Ergebnisse als auch verbal und berechne die Wahrscheinlichkeiten der Gegenereignisse.

A 1

9. Zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten $P(E)$ wird oft folgende Beziehung verwendet: $P(E) = \frac{g}{m}$.
- (g: Anzahl der für E günstigen Ergebnisse, m: Anzahl der für E möglichen Ergebnisse)
Gib Beispiele an, bei denen man mit Hilfe dieser Beziehung die Wahrscheinlichkeit berechnen kann sowie solche, bei denen das nicht möglich ist.

A 2

D 3

10. Bei einer Tombola gewinnt jedes zehnte Los 5 Euro, jedes zwanzigste Los 10 Euro und jedes dreißigste Los 15 Euro.
Wie groß ist beim Ziehen eines Loses die Wahrscheinlichkeit dafür,
- einen Gewinn von 5 Euro zu bekommen?
 - einen Gewinn von 15 Euro zu bekommen?
 - einen Gewinn von mindestens 5 Euro zu bekommen?

P 1

A 1

11. Es wird mit zwei Spielwürfeln gewürfelt und als Ergebnis die Augensumme ermittelt. Untersuche, welches Ereignis wahrscheinlicher ist – die Augensumme 6 oder die Augensumme 9.

P 1

12. Bei der Produktion von Flaschen sind 97 % normgerecht.
Die Flaschen werden in Packungen mit je vier Flaschen verkauft.
Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Packung
- alle Flaschen normgerecht sind,
 - alle Flaschen nicht normgerecht sind,
 - nicht alle Flaschen normgerecht sind.

M 1

13. In einer Stadt befördern Straßenbahnen täglich ungefähr 15000 Menschen.
Bei Kontrollen in den Straßenbahnen hat man festgestellt, dass von 1000 kontrollierten Personen durchschnittlich pro Tag 60 ohne Fahrschein waren.
Wie viel Euro beträgt der Verlust durch die „Schwarzfahrer“ im Jahr, wenn ein Fahrschein 1,50 € kostet?

P 2

14. Beurteile folgende Aussagen.
- (1) Wenn jemand sieben Mal hintereinander keine 1 würfelt, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Würfeln einer 1 beim achten Wurf größer als vorher.
 - (2) Wenn jemand beim Drehen eines Glücksrades im ersten Spiel mit seiner Glückszahl 17 gewinnt, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der 17 beim zweiten Spiel geringer.

A 2

15. Bei einer Tombola wird damit geworben, dass jedes dritte Los gewinnt.
Franziska zieht drei Lose. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass
- sie nacheinander zwei Nieten und dann ein Gewinnlos zieht?
 - sie mindestens ein Gewinnlos zieht?

P 3

M 1

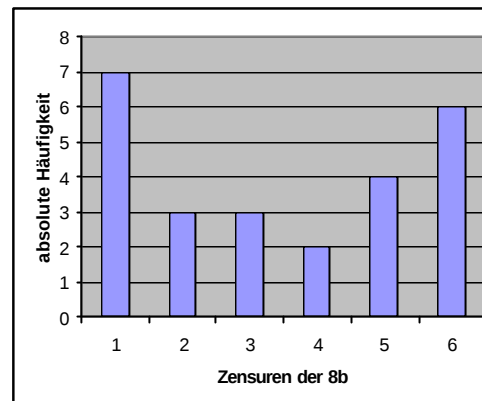
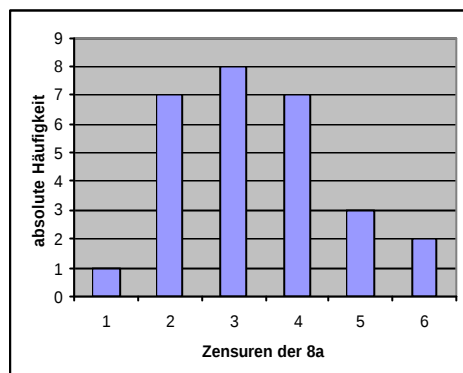
16. Bei einem Wettbewerb sollen fünf vorgelegte Bilder in eine sinnvolle Reihenfolge gebracht werden. Dafür gibt es nur eine Lösung. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Reihenfolge zufällig gewählt wird?

Gym

P 3

M 1

17. In den Klassen 8 a und 8 b wurde die gleiche Klassenarbeit geschrieben. Die erreichten Ergebnisse sind in den folgenden Diagrammen dargestellt.
- Interpretiere die Diagramme für beide Klassen.
 - Ermittle die relativen Häufigkeiten der einzelnen Zensuren (in Prozent) sowie den Durchschnitt jeweils für die 8 a und 8 b.



D 2

18. Stelle die Entwicklung der Anzahl der Einschulungen und der Schulabsolventen gemäß der untenstehenden Tabelle mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms in einem Diagramm dar. Interpretiere das Ergebnis.

Allgemein bildende Schulen in Sachsen-Anhalt seit 1995, Schülerzahlen

Merkmal	1995/96	1996/97	1997/98	1998/99	1999/2000	2000/01	2001/02	2002/03	2003/04
Schüler insgesamt	390 210	386 369	374 351	353 912	331 402	307 616	291 226	270 229	250 436
Einschulungen	34 417	32 944	26 463	18 432	16 164	15 527	14 355	15 109	16 458
Absolventen/abgänger	37 115	38 138	37 615	36 999	37 121	28 272	34 093	34 912	34 766

Quelle: http://www.stala.sachsen-anhalt.de/Internet/Home/Daten_und_Fakten/2/21/211/21111/Statistik_der_allgemein_bildenden_Schulen__ausgewaehlte_Daten.html
recherchiert am 25.07.2005

P 6

D 2

Anforderungsbereich 3

19. Es werden vier Münzen gleichzeitig geworfen.
Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:
A: mindestens ein Wappen und mindestens eine Zahl liegen oben
B: höchstens drei Wappen liegen oben
Untersuche, welches der beiden Ereignisse die größere Wahrscheinlichkeit hat.

P 2

A 1

20. Die Sicherheit von Düsenflugzeugen sei durch die Ausfallwahrscheinlichkeit der Triebwerke bestimmt. Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Triebwerkes betrage 0,3 %. Ein zweistrahliges Düsenflugzeug kann noch mit einem Triebwerk und ein vierstrahliges Düsenflugzeug noch mit zwei Triebwerken fliegen.
Untersuche, ob ein zweistrahliges oder ein vierstrahliges Düsenflugzeug sicherer ist.

P 3

M 1

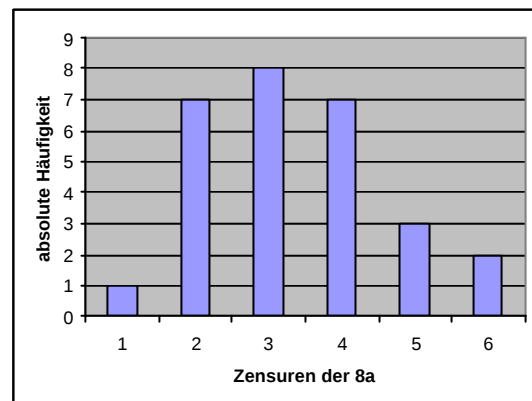
21. Ein Wissenstest umfasst vier Fragen, wozu jeweils drei Auswahlantworten gegeben sind. Davon ist stets genau eine richtig. Man hat den Test bestanden, wenn man mindestens drei Fragen richtig beantwortet hat.
Ermittle die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen des Tests durch eine völlig unwissende Testperson, die die Antworten rein zufällig ankreuzt.

Gym

P 3

M 1

22. In den Klassen 8 a und 8 b wurde die gleiche Klassenarbeit geschrieben, wobei jeweils alle 28 Schüler teilnahmen.
Die Ergebnisse der Klasse 8 a sind im nebenstehenden Diagramm dargestellt.
Es ist bekannt, dass beide Klassen in etwa den gleichen Zensuredurchschnitt haben. Allerdings bestehen in der Klasse 8 b eine breite Leistungsspitze und ein schwaches Mittelfeld. Etwa ein Drittel der Schüler der Klasse 8 b zeigen mangelhafte oder sogar ungenügende Leistungen.



Wie könnte die Zensurenverteilung unter diesen Bedingungen bei der Klasse 8 b aussehen?

Gib ein mögliches Diagramm für die Zensurenverteilung in der Klasse 8 b an.

D 2

23. Untersuche mithilfe folgender Tabelle, wie sich die Anteile der Auszubildenden in einem der aufgeführten Ausbildungsbereiche im Laufe der Zeit verändert haben. Stelle die Entwicklung grafisch dar.

Auszubildende nach Ausbildungsbereichen für Sachsen-Anhalt seit 1992

Jahr	Insgesamt	Davon im Ausbildungsbereich...					
		Industrie u. Handel	Handwerk	Landwirtschaft	Öffent. Dienst	Freie Berufe	Hauswirtsch.
		Auszubildende insgesamt					
1992	49 057	25 232	16 716	1 429	2 672	2 347	661
1993	56 113	26 900	20 606	1 162	3 234	3 369	842
1994	57 598	25 064	23 686	1 195	3 229	3 522	902
1995	63 776	26 849	28 145	1 320	2 973	3 694	795
1996	67 349	28 063	30 304	1 503	2 780	3 880	819
1997	69 798	29 436	31 149	1 770	2 680	3 924	839
1998	68 305	29 796	29 666	1 914	2 501	3 626	802
1999	68 445	31 573	28 414	1 989	2 296	3 301	872
2000	65 653	31 686	26 093	1 960	2 040	3 025	849
2001	62 118	30 941	23 742	1 941	1 832	2 801	861
2002	58 920	29 825	22 061	1 854	1 805	2 547	828
2003	56 522	30 017	19 688	1 898	1 690	2 340	889

Quelle: http://www.stala.sachsen-Anhalt.de/Internet/Home/Daten_und_Fakten/2/21/212/21211/Berufsbildungsstatistik_Auszubildende_nach_Geschlecht_und_Ausbildungsbereichen_.html
Recherchiert am 25.07.2005

P 6

D 2

4 Zur Beachtung von Anforderungsbereichen beim Entwickeln allgemeiner mathematischer Kompetenzen – Kommentare zu ausgewählten Aufgaben

Schülerinnen und Schüler weisen ihr Können beim Lösen von Aufgaben nach. Dabei gibt es ein Wechselspiel zwischen inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Insbesondere bei Anwendungsaufgaben müssen die Schülerinnen und Schüler zunächst die Aufgaben erfassen und analysieren, Lösungswege entwickeln, dabei mathematische Darstellungen verwenden usw. Im Rahmen der mathematischen Bildung nehmen also die allgemeinen mathematischen Kompetenzen eine Schlüsselrolle für das Anwenden von Mathematik ein.

Die im Abschnitt 2.1 beschriebenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen müssen ebenso wie die inhaltsbezogenen Kompetenzen zielgerichtet und systematisch entwickelt werden (vgl. dazu auch *Niveaubestimmende Aufgaben für den Mathematikunterricht, Schuljahrgang 6*).

Ein wesentlicher Aspekt ist dabei das schrittweise Steigern der Anforderungen. Dies kann durch das bewusste Arbeiten mit Aufgaben zu den drei Anforderungsbereichen (kurz: AFB – vgl. Abschnitt 2.3) erfolgen.

Um dafür Anregungen zu geben, werden im Folgenden zu ausgewählten allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Aufgabentripel“ kommentiert.

Ein „Aufgabentripel“ besteht aus drei inhaltlich gleichartigen Aufgaben (A , A_I , A_{II}), wobei die Aufgabe A zum AFB I; die Aufgabe A_I zum AFB II und die Aufgabe A_{II} zum AFB III gehört.

4.1 Zur Kompetenz „Probleme mathematisch lösen“

BEISPIEL 1

Zur Teilkompetenz P 2

Die Schülerinnen und Schüler nutzen heuristische Regeln, Strategien oder Prinzipien (insbesondere Erstellen informativer Figuren, ggf. Einzeichnen von Hilfslinien, Zerlegen in Teilaufgaben, Zurückführen auf Bekanntes)

Aufgabentripel (aus dem Inhaltsbereich ZAHLEN und GRÖSSEN)

A: (vgl. Aufgabe 10, S. 15)

Der Preis für einen DVD-Recorder ist von 299 € auf 199 € ermäßigt worden.

- a) Auf wie viel Prozent ist der Preis gefallen?
- b) Um wie viel Prozent wurde der Preis gesenkt?

A_I: (vgl. Aufgabe 18, S. 17)

Der Preis für einen MP3-Player von 85 € wird dreimal hintereinander um jeweils 15 % gesenkt.

Wie hoch ist der gesamte Preisnachlass in Prozent?

A_{III}: (vgl. Aufgabe 21, S. 18)

Der Preis für einen MP3-Player wird dreimal hintereinander um jeweils 15 % gesenkt.

- a) Wie hoch ist der gesamte Preisnachlass in Prozent?
- b) Um wie viel Prozent müsste man den reduzierten Preis erhöhen, um wieder den ursprünglichen Preis zu erhalten?

Kommentar/Sachanalyse

Die Aufgaben beschreiben das erwartete Niveau der Rahmenrichtlinien zum Bearbeiten von Sachaufgaben der Prozentrechnung. Sie beziehen sich auf das Thema „Preisnachlässe“ aus dem Alltag der Lernenden.

Das Lösen der Aufgaben erfordert von den Schülern und Schülerinnen eine klare inhaltliche Vorstellung der Begriffe und Verfahren der Prozentrechnung. Sie müssen bei der Problembearbeitung in der Lage sein, Aufgaben zu analysieren (u. a. Wiedergabe der Aufgabe mit eigenen Worten, Schätzung des Ergebnisses) und Lösungswege durch das Erkennen von bekannten Strategien und Zusammenhängen der Prozentrechnung zu finden. Sie sollen die gefundenen Lösungswege darstellen und die Ergebnisse deuten.

Um eine gründliche Analysetätigkeit zu den Aufgaben der Prozentrechnung von den Schülern und Schülerinnen zu erwirken, ist es notwendig, Aufgaben aus unterschiedlichen Anforderungsbereichen zu stellen.

Die Aufgabe A erfordert die Lösung einer formalen Zuordnungsaufgabe in der Prozentrechnung und die Angabe der Lösung einer Verminderung mit um und auf.

Die Lernenden sollten laut Rahmenrichtlinien grundsätzlich in der Lösungsmethode des Dreisatzes geschult sein. Dazu ein Beispiel für eine Schülerlösung.

①
a.) $299€ \hat{=} 100\%$
 $199€ \hat{=} x\%$
$$x\% = \frac{199€ \cdot 100\%}{299€}$$

$$x = 66,55\%$$

Der Preis ist auf 66,55% gefallen. ✓
b.) Der Preis wurde um 33,44% gesenkt. ✓

Zur Angabe der Ergebnisse der Teilaufgaben müssen die Schüler und Schülerinnen bei den Teilaufgaben die Wendungen „auf wie viel Prozent“ bzw. „um wie viel Prozent“ auf den Sachverhalt anwenden. Dazu bieten sich grafische Veranschaulichungen an.

Der Vergleich der Antworten mit dem ursprünglichen Grundwert als 100 % ermöglicht die Deutung und Kontrolle des Ergebnisses.

Die Aufgabe A stellt eine höhere Anforderung dar. Sie erfordert von den Schülern und Schülerinnen zu erkennen, dass es sich um eine Aufgabe der prozentualen Verminderung mit wechselndem Grundwert handelt, in der man die Lösung nicht direkt aus den gegebenen Werten berechnen kann, weil die Prozentsätze sich auf verschiedene Grundwerte beziehen. Die Aufgabe wird gelöst, indem man vom Grundwert die absolute Verminderung subtrahiert und so den neuen verminderten Grundwert erhält.

Zur Analyse kann es hilfreich sein, sich diese Aufgabe in Balkenform zu veranschaulichen.

Neuer Preis (85 % des alten Preises)		G_1	$G_1 = 85,00 €$
Neuer Preis (85 % des alten Preises)		$G_2 ?$	$G_2 = G_1 - 15\% \text{ von } G_1;$ $G_2 = 72,25 €$
Neuer Preis (85 % des alten Preises)		$G_3 ?$	$G_3 = G_2 - 15\% \text{ von } G_2;$ $G_3 = 61,41 €$

je 15 %
(Ermäßigung)

52,20 € ist der gesuchte Prozentwert. Der gesamte Preisnachlass beträgt 38,6 %.

Auch bei der Aufgabe A_{II} ist zunächst das inhaltliche Verständnis unabdingbar. Es ist in der Aufgabe kein Grundwert angegeben. Die Schüler und Schülerinnen können mit einem selbst gewählten Preis durch Vorwärtsarbeiten zur Lösung gelangen (analog der Aufgabe wie im Anforderungsbereich II).

Beispiel für eine solche Schülerlösung – siehe Abbildung 1.

Der gesamte Preisnachlass beträgt demnach 38,6 %. Den reduzierten Preis müsste man um 62,8 % anheben, um den ursprünglichen Preis wieder zu erhalten.

Da mit einem Beispiel gearbeitet wurde, ist es eigentlich notwendig zu zeigen, dass die Lösungen für alle Preise bei dieser Senkung zutreffen. Schüler und Schülerinnen, die diese Notwendigkeit erkannt haben, berücksichtigten dies wie folgt (s. Abbildung 2).

② $100 \text{ €} \hat{=} 100\%$ 1. Senkung
 $85 \text{ €} \hat{=} 85\%$

$85 \text{ €} \hat{=} 100\%$ 2. Senkung
 $72,25 \text{ €} \hat{=} 85\%$

$72,25 \text{ €} \hat{=} 100\%$ 3. Senkung
 $61,41 \text{ €} \hat{=} 85\%$

$100 \text{ €} \hat{=} 100\%$
 $61,41 \text{ €} \hat{=} 61,41\%$

$100\% - 61,41\% = 38,59\%$ ✓

b) $61,41 \text{ €} \hat{=} 100\%$
 $100 \text{ €} \hat{=} 162,84\%$

um 62,84% ✓

Abbildung 1

2a) 1. Senkung: $k \cdot 0,85$
 2. -"- $k \cdot 0,85 \cdot 0,85$
 3. -"- $k \cdot 0,85 \cdot 0,85 \cdot 0,85 = 0,614$

$100\% - 61,4\% = 38,6\%$ ✓

Der Preis wurde auf insgesamt 38,6% verringert.

b) $61,4\% \cdot x = 100\% \quad | : 61,4\%$
 $x = 100\% : 61,4\% = 1,629$

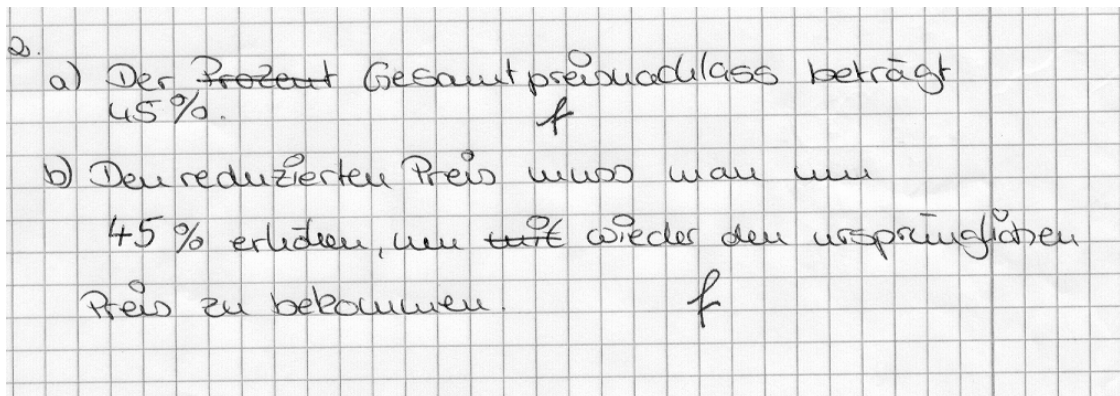
Der reduzierte Preis müsste um 62,9% erhöht werden, um wieder auf den ursprünglichen Preis zu gelangen. ✓

3)

Abbildung 2

Der Auswertung typischer Schülerfehler sollte gebührend Rechnung getragen werden.

Folgende falsche Schülerlösungen könnte man dazu nutzen:



BEISPIEL 2

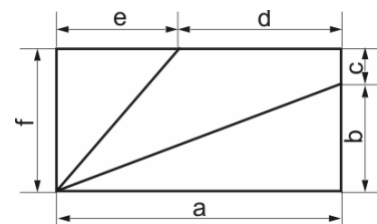
Zur Teilkompetenz P 5:

Die Schülerinnen und Schüler reflektieren nach Aufforderung über das Finden von Lösungsideen und Lösungswegen bzw. können gegebenenfalls alternative Lösungswege angeben.

Aufgabentripel (aus dem Inhaltsbereich GLEICHUNGEN und UNGLEICHUNGEN)

A: (vgl. Aufgabe 10, S. 21)

Die Abbildung zeigt ein rechteckiges Zierfenster mit Bleiverglasung.



- a) Klaus gibt für die Berechnung der Länge l des äußeren Rahmens folgende Gleichung an: $l = a + b + c + d + e + f$
Ina rechnet nach folgender Formel: $l = 2(a + b)$

Beurteile beide Lösungsansätze.

- b) Für die Berechnung der Länge s der kürzeren inneren Strebe geben Klaus und Ina jeweils folgende Gleichungen an:

Klaus: $s = e + f$

Ina: $s = e^2 + f^2$

Beurteile die Lösungsansätze von Klaus und Ina.

A₁: (vgl. Aufgabe 21, S. 23)

Die Abbildung zeigt ein rechteckiges Zierfenster mit Bleiverglasung.

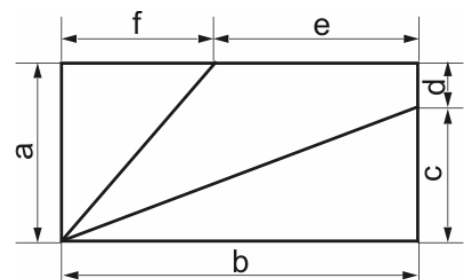
Die Streckenlängen a , b , c , d , e und f seien bekannt.

Zur Berechnung der Gesamtlänge g der Bleifassungen (äußerer Rahmen und innere Streben) hat Franziska folgende Gleichung aufgestellt:

$$g = 2(a + b) + \sqrt{b^2 + c^2} + \sqrt{a^2 + f^2}.$$

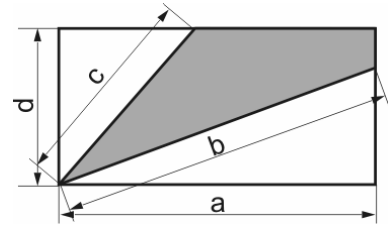
Wie kann sie darauf gekommen sein?

Warum treten die gegebenen Größen d und e nicht auf?



A_{III}: (vgl. Aufgabe 26, S. 25)

Die Abbildung zeigt ein rechteckiges Zierfenster mit Bleiverglasung, von dem die Längen der Streben a, b, c, d gegeben seien.



Zur Berechnung des Inhalts A der schraffierten Fläche hat

Sophie folgende Gleichung aufgestellt: $A = a \cdot d - \frac{1}{2} d \sqrt{c^2 - d^2} - \frac{1}{2} a \sqrt{b^2 - a^2}$.

Wie kann sie darauf gekommen sein?

Kommentar/Sachanalyse

Die Bewältigung der vorgegebenen Aufgaben erfordert Kenntnisse über Sätze der ebenen Geometrie, insbesondere über den Satz des Pythagoras sowie Fähigkeiten, Gleichungen aufzustellen, aber vor allem auch umgekehrt, solche symbolsprachlichen Darstellungen zu verstehen und bezüglich einer Anwendungssituation zu beurteilen. Unterschiede in den Anforderungen ergeben sich aus der Komplexität der vorgegebenen Formeln. Es sind sowohl einfach strukturierte Formeln als auch Formeln zu beurteilen, die Rechenoperationen bis zur dritten Stufe einbeziehen und Formeln zu unterschiedlichen geometrischen Objekten miteinander verknüpfen. Diese Gleichungen als Lösungsideen zu reflektieren verlangt mathematisches Modellieren und Argumentieren auf differenzierten Anforderungsniveaus.

In der **Aufgabe A** sind vier Modelle zu reflektieren, die sich auf bekannte Aufgabentypen und die direkte Anwendung des Satzes des Pythagoras und den Begriff des „Umfangs von Rechtecken“ beziehen. Im Umgang mit Variablen sind elementare Kenntnisse und Fähigkeiten anzuwenden. Die Beurteilung der Lösungsansätze bedarf weniger Schritte.

Die symbolsprachliche Darstellung in der **Aufgabe A_I** stellt erhöhte Anforderungen gegenüber dem AFB I an die Lernenden: in der Formel sind die Rechenoperationen der ersten bis zur dritten Stufe miteinander verknüpft, Strecken unterschiedlicher geometrischer Objekte werden betrachtet, das mathematische Modell stellt keinen bekannten Aufgabentyp dar. Für das Finden der Lösungsidee sind die Termstrukturen in der Gleichung zu untersuchen und bezüglich der Anwendungssituation zu entschlüsseln. Der Kommentar dazu bedarf ebenfalls wie bei Aufgabe b) mehrerer Schritte. Es können zum Beispiel folgende Fragen beantwortet werden: Wo tauchen die Teilstrecken e und f in der Gesamtstrecke g der Bleiverglasung auf? Durch welchen Term werden sie in der Formel mit erfasst?

Aus der Antwort zur **Aufgabe A_{II}** muss hervorgehen, dass sich die Größe des Flächeninhalts des Vierecks nicht direkt aus den gegebenen Stücken errechnen lässt und hier die „Subtraktionsstrategie“ verwendet wurde. Dafür sind die Termstrukturen in der Gleichung zu

untersuchen und zu entschlüsseln. Durch Rückwärtsarbeiten können zum Beispiel den gegebenen symbolsprachlichen Darstellungen „geometrische Objekte“ zugeordnet und die Lösungsidee nachvollzogen werden.

Der erhöhte Komplexitätsgrad in der Anforderung gegenüber dem AFB II liegt hier darin, dass die Entwicklung eines recht komplexen mathematischen Modells über eine mehrschrittige Argumentation verbal darzustellen ist.

4.2 Zur Kompetenz „mathematisch modellieren“

BEISPIEL 3

Zu den Teilkompetenzen M 2/M 4:

Die Schülerinnen und Schüler können umgangs- sowie fachsprachliche Wendungen und Signalworte aus verschiedenen Kontexten sachgerecht in Terme oder Gleichungen übersetzen ... bzw. umgekehrt Terme oder Gleichungen verbalisieren und ordnen mathematischen Modellen (in Form linearer Gleichungen oder Funktionen) Anwendungssituationen zu.

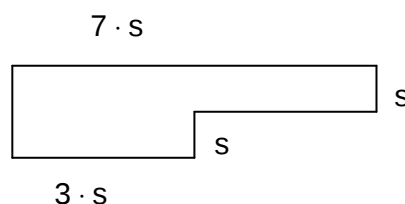
Aufgabentripel:

(aus dem Inhaltsbereich GLEICHUNGEN UND UNGLEICHUNGEN)

A: (vgl. Aufgabe 9, S. 21)

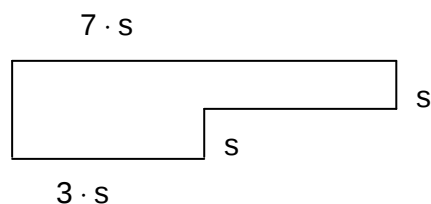
Gegeben ist ein Sechseck. Sein Umfang beträgt 9 cm.

- Gib für den Umfang des Sechsecks eine Gleichung unter Verwendung der Variablen s an.
- Berechne die Länge der Strecke s .



A_I: (vgl. Aufgabe 18, S. 23)

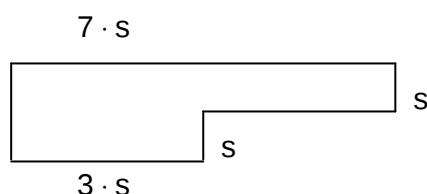
Gegeben ist ein Sechseck. Sein Umfang beträgt 9 cm.



- Gib für die Berechnung des Flächeninhalts des Sechsecks eine Gleichung unter Verwendung der Variablen s an.
- Berechne den Flächeninhalt des Sechsecks.

A_{III}: (vgl. Aufgabe 23, S. 24)

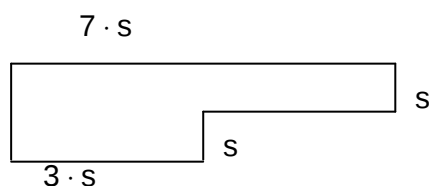
Gegeben seien ein Sechseck und die Terme $10s^2$ und $18s$.
Untersuche, welche Zusammenhänge zwischen den Termen und dem Sechseck bestehen.



Kommentar/Sachanalyse

Die angegebenen Aufgaben beschreiben Erwartungsniveaus des verständigen Umgangs mit Gleichungen in einer einfachen Anwendungssituation. Sie stellen eine Fortführung der Aufgabe 12, AFB I, S. 27 aus den niveaubestimmenden Aufgaben für den Mathematikunterricht des 6. Schuljahrganges dar:

- Gib zwei verschiedene Möglichkeiten an, die Figur in Rechtecke zu zerlegen.
- Berechne den Flächeninhalt der Figur. Entnimm die Maße der Zeichnung.



Der gegenüber Klasse 6 neue Qualitätsanspruch trifft im Wesentlichen die präferierten Handlungsmuster (gegenständliches Arbeiten durch Messen in Klasse sechs – abstraktes Arbeiten ohne Messen in Klasse acht), wenngleich Elemente des in Klasse sechs verwendeten handlungsorientierten Arbeitens vom Schüler auch hier bei der Ermittlung des Flächeninhaltes (Aufgabe zum AFB II) verwendet werden können. Die beiden ersten Aufgaben stellen Realisierungshandlungen im Sinne des Entwickelns einer Formel dar, die dritte Aufgabe ist durch eine Identifizierungshandlung geprägt, ohne dass die in Frage stehenden Zusammenhänge explizit verbalisiert werden.

Somit liegen die Unterschiede bei den aufgeführten Aufgabenbeispielen in der Art der anzuwendenden heuristischen Strategien und damit der Komplexität der auszuführenden Überlegungen: Umfangsberechnung - Umfangs- und Flächenberechnung.

Die **Aufgabe A** umfasst das Entwickeln einer Formel zur Umfangsberechnung in Abhängigkeit der explizit benannten Seitenlänge s .

Wenngleich die Anforderung an den Lernenden nicht so elementar ist, den Umfang des gegebenen Sechseckes durch einfaches Addieren von sechs Längenmaßzahlen zu ermitteln, so handelt es sich dennoch um elementare Anforderungen im Sinne eines

Reproduzieren des Kalküls zum Bestimmen von Umfängen beliebiger n-Ecke bei gegebener Kantenlänge.

Die Aufgabe erfordert zur erfolgreichen Bewältigung Kenntnisse über den Umfangsbegriff für beliebige n-Ecke. Differenzierungen im Erwartungsbild entstehen durch den Grad der Entfaltung der aufzustellenden Gleichung:

$$\begin{array}{rcl} 2s + 3s + s + 4s + s + 7s & = & 9 \text{ cm} \\ 2 \cdot 2s + 2 \cdot 7s & = & 9 \text{ cm} \\ 18s & = & 9 \text{ cm.} \end{array}$$

Zur Steuerung der Schülertätigkeit wäre es denkbar, die Lernenden

- zur Beschriftung aller vorkommenden Seiten unter Benutzung der Variable s und
- zur anschließenden detaillierten Notation des Ermittels des Umfangs aufzufordern.

Die **Aufgabe A_I** fordert das Entwickeln einer Formel zur Flächenberechnung in Abhängigkeit der explizit benannten Seitenlänge s . Das Entwickeln einer möglichen Formel zur Berechnung ist weitgehend elementarer Natur. Im Prozess des Modellierens ist die Figur in zwei Rechtecke zu teilen und für jedes dieser Rechtecke der Flächeninhalt separat in Abhängigkeit von s auszudrücken. Die konkrete Berechnung hingegen erfordert vom Schüler den Rückgriff auf die nicht explizit geforderte Umfangsbestimmung des Sechsecks.

Denkbar ist es auch, sich dem Ermitteln des gesuchten Flächeninhaltes durch Auslegen mit Einheitsquadraten der Seitenlänge s zu nähern. So kann ein Term für die Flächenberechnung entwickelt werden, etwa $32 \text{ EQ} + 41 \text{ EQ}$ (EQ: Einheitsquadrate) oder mit den Mitteln des 8. Schuljahrgangs: $3 \cdot 2s^2 + 4 \cdot 1s^2$ bzw. $10s^2$.

Die **Aufgabe A_{II}** verlangt das Berechnen der explizit geforderten Größe des Flächeninhalts über den nicht explizit geforderten Zusammenhang zwischen Umfang und Seitenlänge.

Während die beiden vorhergehenden Aufgaben durch das Aufstellen eines mathematischen Modells heuristisch durch die Strategie des Vorwärtsarbeitens geprägt waren, wird in dieser Aufgabe die Fähigkeit der Schüler angesprochen, vorgegebene Modelle einem Sachverhalt begründet zuzuordnen und sich damit zusätzlich der Strategie des Rückwärtsarbeitens zu bedienen.

Die durch den Lehrer durch Impulse zu steuernde Schlusskette ließe sich etwa wie folgt beschreiben:

(Rückwärtsarbeiten)

- s – offensichtlich eine Streckenlänge (z. B. in cm)
- s^2 – folgerichtig ein Flächeninhalt (z. B. in cm²)
- $18s$ – beschreibt für die gegebene Figur daher eine Längenmaßzahl
- $10s^2$ – beschreibt für die gegebene Figur daher eine Flächenmaßzahl

(Vorwärtsarbeiten)

Wie können diese Formeln für die gegebene Figur entwickelt werden?

4.3 Zur Kompetenz „mathematisch argumentieren“

BEISPIEL 4

Zur Teilkompetenz A 3/A 5:

Die Schülerinnen und Schüler können

- zu bekannten Sachverhalten die Wahrheit von Existenzaussagen durch Angabe eines Beispiels und die Falschheit von Allaussagen durch Angabe eines Gegenbeispiels begründen,
- einfach strukturierte mehrschrittige Argumentationen zu bekannten Sachverhalten nachvollziehen und beurteilen.

Aufgabentripel (aus dem Inhaltsbereich GEOMETRIE)

A: (vgl. Aufgabe 3, S. 36)

Drei Punkte A, B und C sollen so in der Ebene liegen, dass jeder Punkt von jedem der anderen Punkte 2 cm entfernt liegt.

Welche der folgenden Aussagen ist dann in jedem Falle richtig? Begründe.

- (1) Der Punkt A liegt 2 cm entfernt von der durch B und C bestimmten Geraden.
- (2) Die drei Punkte bilden ein gleichseitiges Dreieck.
- (3) Die Punkte B und C liegen auf einem Kreis um den Punkt A mit dem Radius 2 cm.

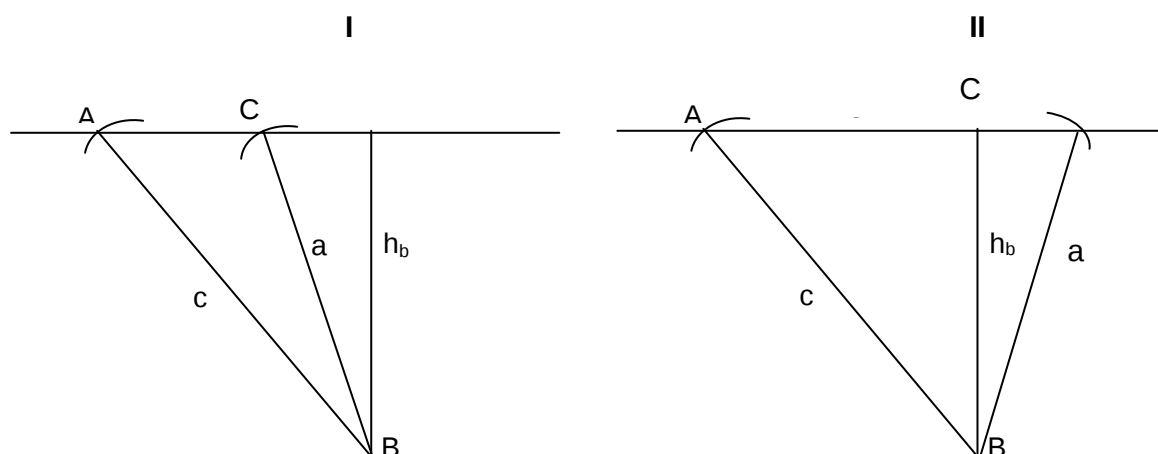
A_I: (vgl. Aufgabe 23, S. 42)

Von einem Dreieck ABC üblicher Bezeichnung sind folgende Stücke gegeben:

$a = 4 \text{ cm}$, $c = 6 \text{ cm}$, $h_b = 3 \text{ cm}$.

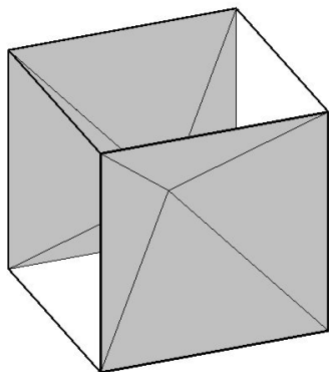
Zwei Vorschläge werden für eine Konstruktion des Dreiecks durch die folgenden Abbildungen unterbreitet:

Was meinst du dazu?



A_{III}: (vgl. Aufgabe 32, S. 45)

Du siehst im Bild einen Würfel, der im Inneren von sechs zueinander kongruenten Pyramiden ausgefüllt ist.



Es gilt also

$$6 \cdot V_{\text{Pyr}} = V_{\text{W}} = a^3$$

oder auch

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{6} \cdot a^3 = \frac{1}{6} \cdot a^2 \cdot a$$

und deshalb allgemein

für jede Pyramide

$$V_{\text{Pyr}} = \frac{1}{6} \cdot A_g \cdot h$$

- Kommentiere die einzelnen Herleitungsschritte.
- Beurteile das gefundene Ergebnis. Ist es richtig? Falls nicht, warum nicht?

Kommentar/Sachanalyse

Die angegebenen Aufgaben zielen darauf ab, bei den Lernenden Fähigkeiten im kritischen Beurteilen vorgetragener Gedanken zu entwickeln. Dabei geht es um zwei Dinge: die Erziehung zum kritischen Beurteilen überhaupt und die Anwendung von Wissen zur Prüfung von Ergebnissen.

Die Verwirklichung der formulierten Zielsetzungen sollte sich auf zentrale Inhalte der Rahmenrichtlinien konzentrieren. So greifen die zusammen gestellten Aufgaben auch zentrale Wissens Elemente (Abstandsbegriff) und Könnenskomponenten (Fähigkeiten im Konstruieren, Fähigkeiten im abstrakten Denken) auf. Qualitative Unterschiede ergeben sich durch einen unterschiedlich hohen Anteil dieser Komponenten am Lösungsprozess.

Zu Aufgabe A

Der Abstandsbegriff ist ein zentraler Begriff der Elementargeometrie. Hier wird dieser im Wesentlichen mit dem Kreisbegriff verknüpft (drei Punkte). Eigentlich sind Anforderungen, wie die hier illustrierten, steter Bestandteil des Unterrichts. Durch das gegebene Aufgabenbeispiel wird die Forderung elementarisiert. Die Anforderung an das Beurteilen wird dadurch etwas erhöht, als die Aufgabe verlangt, genau die Möglichkeiten auszuwählen, die in jedem Falle zutreffen, also allgemeingültig sind.

Die Formulierung des Auftrages kann variiert werden, z. B. „Welche der Aussagen kann dann zutreffen?“ (vgl. auch Aufgabe 10, S. 38). Gleichfalls kann das Anspruchsniveau über die Anzahl verwendeter Punkte variiert werden.

Beispiel:

Gegeben sei ein Punkt A. Drei weitere Punkte B, C und D sollen ein jeder im Abstand von 2 cm zu A liegen.

Welche der folgenden Aussagen ist dann in jedem Fall richtig? Begründe.

- (1) Die drei Punkte B, C und D liegen auf ein und derselben Geraden, die 2 cm von A entfernt ist.
- (2) Die drei Punkte B, C und D bilden ein Dreieck, auf dessen Seite $\overline{BC}$ der Punkt A liegt.
- (3) Die drei Punkte B, C und D liegen auf ein und demselben Kreis um A, dessen Radius 2 cm beträgt.

Zu Aufgabe A_I

Die Aufgabe zielt auf Kenntnisse über Größen am Dreieck ab und ist insofern von zentraler Bedeutung. Die erhöhte Anforderung gegenüber AFB I ist darin zu sehen, dass die Kenntnisse um diese Größen in die Beschreibung einer geometrischen Konstruktion einfließen. Damit erlangen heuristische Elemente, etwa die Kenntnis um heuristische Strategien (Nutzen geometrischer Örter) für die Beurteilung der vorliegenden Lösungen eine große Bedeutung.

Beiden Vorschlägen gemeinsam ist, dass sie jeweils nur einen der beiden möglichen Fälle aufgreifen. Durch das Gegenüberstellen der beiden Bilder werden die Lernenden in die Lage versetzt, zu erkennen, dass es zu der formulierten Aufgabe offensichtlich zwei voneinander (nicht nur bis auf Kongruenz) verschiedene Lösungen gibt. Alternativ kann an stelle der Abbildungen natürlich auch jeweils eine in Worte gefasste Konstruktionsbeschreibung oder eine Kopplung einer Wortvorschrift mit einem Bild genutzt werden. Dadurch erhöhen sich die gestellten Anforderungen.

Zu Aufgabe A_{II}

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um das Nachvollziehen und Beurteilen eines Abstraktionsprozesses. Damit zielt sie auf zwei Dinge ab: Zum Einen sollen die Lernenden ihre allgemeingeistigen Fähigkeiten schulen in dem sie erkennen, dass der vorgetragene Gedankengang aus erkenntnistheoretischer Sicht gewagt sein muss. Schließlich wird vom sehr speziellen Fall des Würfels, der sechs zueinander kongruente Pyramiden in sich aufnehmen kann, mit der Formulierung „Für alle Pyramiden gilt ...“ auf eine Allaussage geschlossen. Dann muss es aber auch für Pyramiden gelten, die etwa einem Quader ohne Würfelgestalt einbeschrieben werden können. Es ist zu überlegen, ob der Gedankenschluss dann auch gilt. Zum Anderen sollen die Lernenden die vorgetragenen Gedanken ihren eigenen Kenntnissen gegenüber stellen und Gründe für das Zutreffen oder eben Nichtzutreffen des Ergebnisses angeben. Bei Kenntnis der Volumeninhaltsformel für Pyramiden ist die Beurteilung des letztendlich aufgeschriebenen Resultates nicht schwer, wohl aber das Suchen nach Gegenargumenten. Hier wären die aufgeschriebenen Terme zu

interpretieren (Was bedeuten sie geometrisch?), wäre zu überlegen, ob nicht auch ganz andere Umformungen des Termes denkbar wären.

Sind die Lernenden nicht in Kenntnis der Formel eröffnet sich ein großes Feld des Prüfens, Argumentierens und Veränderns. In jedem Falle wird sich – wegen der doch nicht unerheblichen Anforderungen an das räumliche Vorstellungsvermögen – das Hantieren mit einem Körpermodell als nützlich erweisen.

BEISPIEL 5

Zu den Teilkompetenzen A 4:

Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Lösungen bzw. Lösungswege zu begründen.

Aufgabentripel (aus dem Inhaltsbereich ZUORDNUNGEN und FUNKTIONEN)

A: (vgl. Aufgabe 10, S. 28)

Gegeben sind die linearen Funktionen f_1 und f_2 durch die Gleichungen $f_1(x) = -x + 3,5$ und $f_2(x) = \frac{5}{3}x - 0,5$ sowie der Punkt $S(1,5; 2)$.

Begründe auf verschiedene Weise, dass S der Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 ist.

A_I: (vgl. Aufgabe 20, S. 31)

Gegeben ist die lineare Funktion f_1 mit $y = f_1(x) = \frac{4}{3}x - 1,5$ sowie der Punkt $S(3; 2,5)$.

Ermittle die Gleichung einer linearen Funktion f_2 , so dass S der Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_2 ist.

Begründe deinen Lösungsweg.

Äußere dich zur Behauptung, dass die Aufgabe genau eine Lösung hat.

A_{III}: (vgl. Aufgabe 29, S. 33)

Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = m_1x + n_1$ und die lineare Funktion f mit $f(x) = m_2x + n_2$, wobei $m_1 \neq m_2$.

Untersuche, welche Bedingungen für m und n gelten müssen, damit der Schnittpunkt der Graphen beider Funktionen jeweils auf einer Koordinatenachse liegt.

Überprüfe an einem selbstgewählten Beispiel die Richtigkeit der Bedingungen für m und n .

Kommentar/Sachanalyse

Die **Aufgabe A** erfordert von den Schülerinnen und Schülern die Richtigkeit der Lösung einer Aufgabe auf unterschiedlichen Wegen zu begründen. Erfahrungsgemäß geben sich die Lernenden mit einer gefundenen Lösung schnell zufrieden, ohne über weitere Lösungswege nachzudenken, die ihnen unter anderem auch als Kontrolle der eigenen Lernergebnisse dienen könnten. Sie zeigt den Schülerinnen und Schülern auch, dass ein Begründen durch Anwendung unterschiedlicher Verfahren erfolgen kann. So ist es z. B. möglich, einfach nur zu überprüfen, ob der Punkt S auf beiden Graphen liegt (Punktprobe). Weiterhin wäre denkbar die Graphen zu zeichnen oder rechnerisch (Gleichsetzen der Funktionsterme) die Koordinaten des Schnittpunkts zu ermitteln.

Die **Aufgabe A_I** stellt für die Lernenden eine erhöhte Anforderung dar, denn sie müssen nicht nur eine Lösung finden, sondern auch in der Lage sein, ihren Lösungsweg schrittweise zu begründen. Dazu benötigen sie sichere Kenntnisse über den Anstieg und klare Vorstellungen zum Verlauf der Graphen linearer Funktionen. Für den ersten Schritt der Lösung ist zu beachten, dass sich die Graphen nur dann schneiden, wenn sie unterschiedliche Anstiege besitzen. Mit der Angabe der Koordinaten des Schnittpunktes ist dann eine Funktion eindeutig bestimmt. Anschließend muss nur noch das absolute Glied n für die Gleichung ermittelt werden.

Ein anderer Lösungsweg könnte davon ausgehen, dass eine lineare Funktion durch die Vorgabe zweier Paare eindeutig bestimmt ist. Dann benötigt man zum gegebenen Schnittpunkt nur noch einen weiteren frei wählbaren Punkt, der aber kein Punkt des Graphen von f_1 sein darf. Abschließend erfordert dieser Weg noch das Aufstellen einer Gleichung über die Koordinaten dieser Punkte.

Im zweiten Teil der Aufgabe zeigen die Schülerinnen und Schüler durch die Angabe von Gegenbeispielen, dass sie die logischen Bestandteile der Sprache verstehen und für die Begründung nutzen können.

Die **Aufgabe A_{II}** ist wesentlich komplexer aufgebaut als die Aufgabe zum AFB II. Dies ergibt sich zum einen durch die allgemeinen Funktionsgleichungen. Sie erfordern höhere Abstraktionsleistungen und verallgemeinerte Kenntnisse zum Verlauf der Graphen linearer Funktionen. Die erhöhte Schwierigkeit dieser Aufgabe ergibt sich zum anderen durch die notwendigen Fallunterscheidungen zur Ermittlung der Schnittpunkte der beiden Koordinatenachsen. Das ist für die Lernenden eine eher selten geübte Aufgabe.

Die Lernenden müssen bei ihrer Argumentation diese beiden Sachverhalte miteinander verknüpfen und systematisch vorgehen.

Die Überlegungen zum Schnittpunkt mit der y -Achse sind relativ einfach ($n_1 = n_2$), da dieser nur von n abhängig ist.

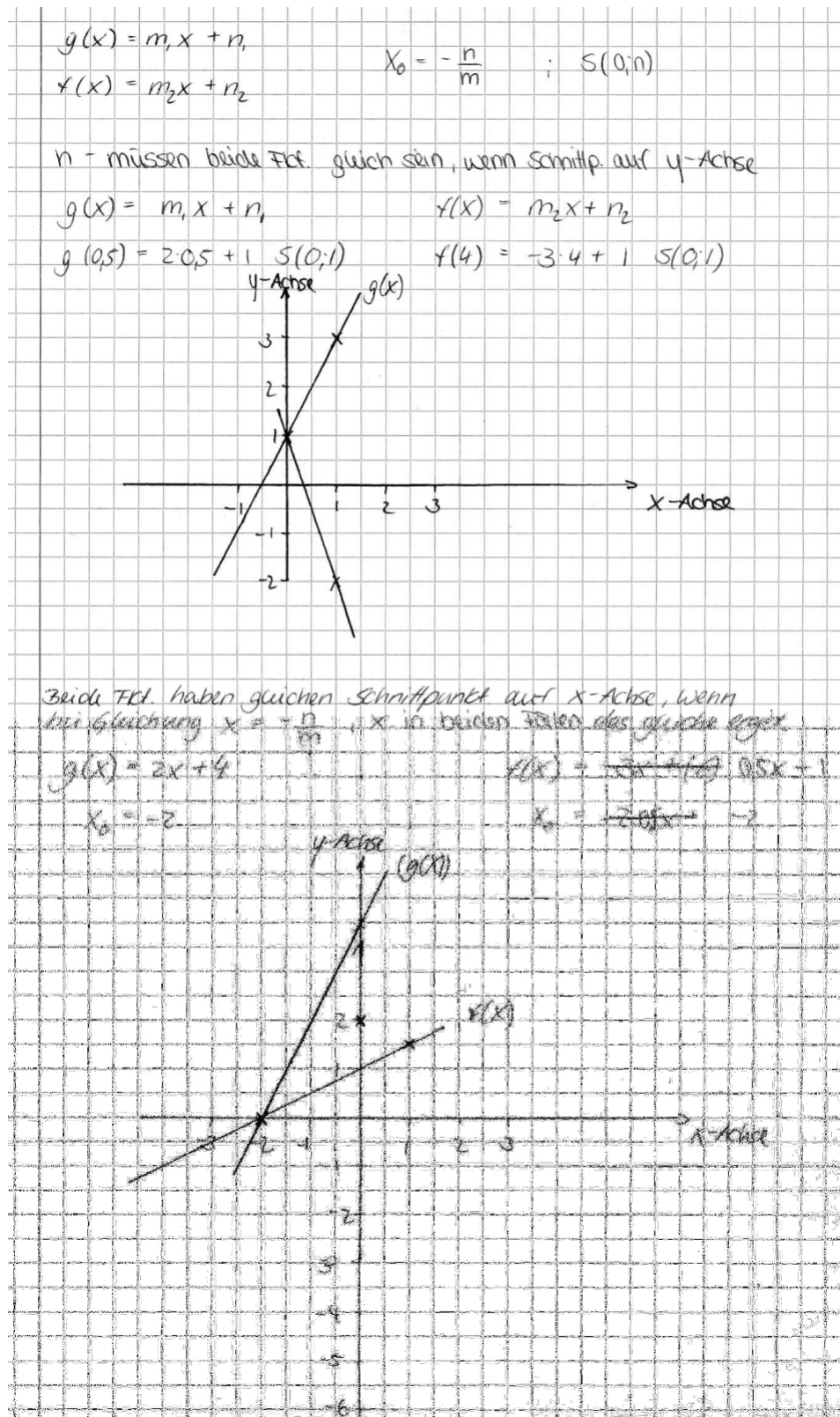
Der Schnittpunkt mit der x -Achse wird dagegen von m und n bestimmt. Da die Abszisse dieses Punktes die Nullstelle beider Funktionen ist, müssen die Schülerinnen und Schüler in der Lage sein, diese für eine allgemeine Gleichung zu ermitteln und anschließend gleichzusetzen.

Ein wichtiger Teil der Aufgabestellung ist die Aufforderung mit selbstgewählten Beispielen zu arbeiten. Im Unterricht sollte auch diese Möglichkeit zur Überprüfung der Richtigkeit von Lösungen stärker miteinbezogen werden.

Die dargestellte Schülerlösung (siehe S. 66) zeigt, dass der Inhalt im Wesentlichen verstanden wurde, jedoch diesem Lernenden schwer gefallen ist, die Lösung vollständig und richtig darzustellen. Es mangelt an einer klaren Fallunterscheidung; weiterhin fehlt nach der Lösung des Beispiels noch einmal der konkrete Vergleich mit der ursprünglichen Lösung.

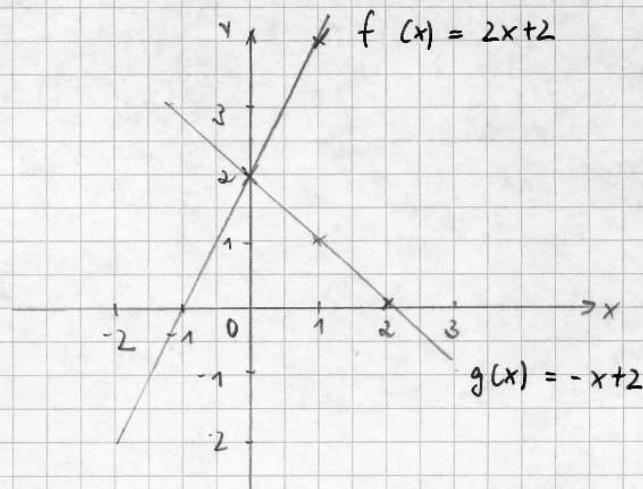
Bei der Entwicklung entsprechender Kompetenzen kommt es auch darauf an, unvollkommene Schülerlösungen auszuwerten und Beispiele für gelungene Darstellungen zu entwickeln (siehe S. 67).

Schülerlösung zu Aufgabe A_{II}



1. Fall : gemeinsamer Punkt auf der y-Achse

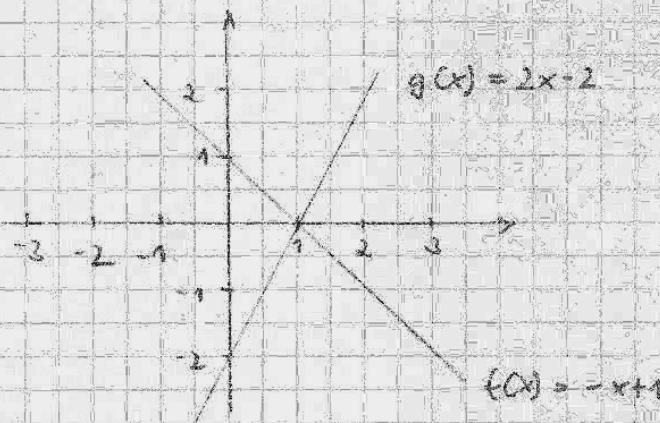
Bedingungen: $m_1 \neq m_2$ und $n_1 = n_2$



Probe: $\left. \begin{array}{l} f(0) = 2 \\ g(0) = 2 \end{array} \right\}$ gemeinsamer Punkt $S_y(0; 2)$

2. Fall : gemeinsamer Punkt auf der x-Achse

Bedingungen: $m_1 \neq m_2$ $n_1 \neq n_2$
da gemeinsame Nullstelle: $-\frac{n_1}{m_1} = -\frac{n_2}{m_2}$



Probe: $\begin{array}{llll} g(x) = 2x - 2 & m_2 = 2 & n_2 = -2 & -\frac{n_2}{m_2} = 1 \\ f(x) = -x + 1 & m_1 = -1 & n_1 = 1 & -\frac{n_1}{m_1} = 1 \end{array}$

$g(1) = 0$ und $f(1) = 0$ $S_x(1; 0)$

4.4 Zur Kompetenz „Mathematische Darstellungen verwenden“

BEISPIEL 6

Zur Teilkompetenz D 1:

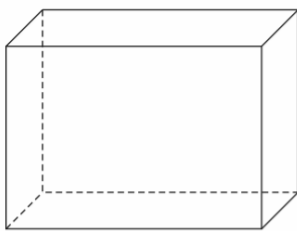
Die Schülerinnen und Schüler können Verfahren zur Darstellung geometrischer Gebilde des Raumes anwenden und umgekehrt aus derartigen Darstellungen eine Vorstellung von den räumlichen Objekten gewinnen.

Beispiel für ein Aufgabentripel (aus dem Inhaltsbereich GEOMETRIE)

A: (vgl. Aufgabe 4, S. 36)

Gib an, welche der dargestellten Körper Prismen sind.

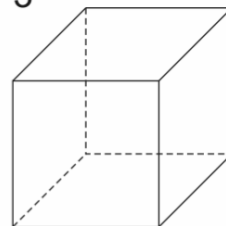
1



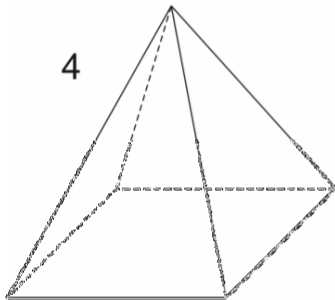
2



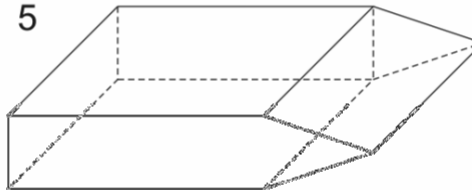
3



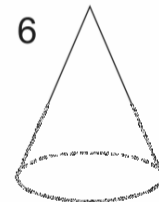
4



5



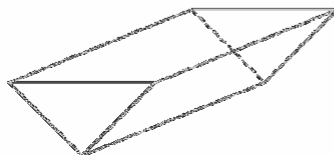
6



7



8

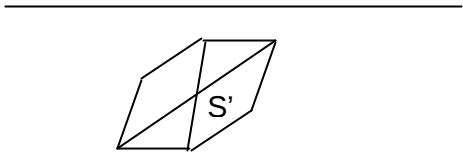
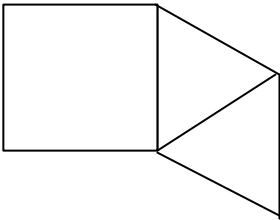
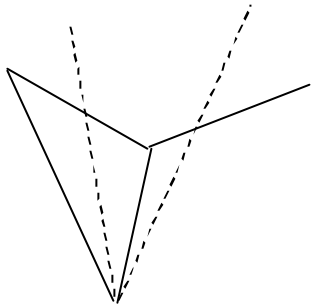


9



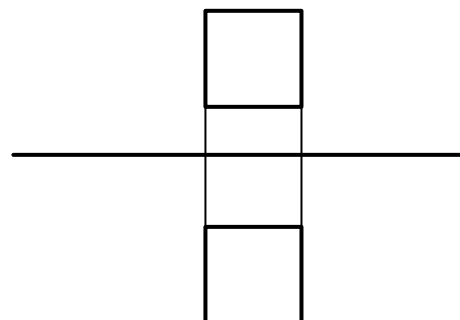
A_I: (vgl. Aufgabe 21, S. 41)

Ergänze die Abbildungen, so dass es sich jeweils um die Darstellung einer n -seitigen Pyramide handelt.

Grund- und Aufriss einer Pyramide ($n = 6$)	
Netz einer Pyramide ($n = 4$)	
Schrägbild einer Pyramide ($n = 5$)	

A_{III}: (vgl. Aufgabe 33, S. 45)

In der Abbildung siehst du Grund- und Aufriss eines Körpers bei senkrechter Parallelprojektion.
Stelle solche Körper als Schrägbild dar.



Kommentar/Sachanalyse

Die angegebenen Aufgaben zielen auf Fähigkeiten der Lernenden ab, Kenntnisse über Grundverfahren der darstellenden Geometrie sowohl beim Erkennen (Identifizieren) bekannter geometrischer Körper als auch beim Darstellen (Realisieren) solcher Körper sachgerecht anzuwenden. Entsprechend der Intentionen der Rahmenrichtlinien stehen dabei die senkrechte und die schräge Parallelprojektion im Fokus des Interesses.

Qualitative Unterschiede ergeben sich einerseits durch das Erfordernis des Anwendens und Ausführens behandelter Verfahren in unterschiedlich starker Ausprägung. Andererseits hängt der Erfolg beim Lösen der Aufgaben eng vom Entwicklungsstand räumlicher Vorstellungskraft der Lernenden ab. Darstellungen in schräger Parallelprojektion unterstützen den gedanklichen Prozess des Vorstellens mehr als etwa solche in senkrechter Parallelprojektion. Das „Lesen“ von Darstellungen, also das Identifizieren eines mathematischen Objektes, stellt eine nicht so hohe Anforderung dar wie das selbstständige Entwickeln derselben. Vielfältigkeit in den Anforderungen stellt sich auch durch den Wechsel der gewählten Darstellungsformen (Normalriss³ – Abwicklung (Netz) – Schrägriss) ein.

Insofern zeigen sich die qualitativen Unterschiede bei den Aufgabenbeispielen in folgender Weise:

A _I	Der Begriff des Prismas ist ein zentraler Begriff in den Rahmenrichtlinien. Das Erkennen von Prismen auf Grund der definierenden Eigenschaften in der Umwelt der Lernenden kann daher als elementare Anforderung verstanden werden. Für den Unterricht stellen das Erkennen von Prismen aus „plastischen“, das räumliche Vorstellen unterstützenden Darstellungen adäquate Anforderungen dar. Somit handelt es sich hier um eine reine Identifizierungsaufgabe, die durch die Beschränkung auf Schrägrisse als einziger Darstellungsform die Anforderungen an räumliches Vorstellen minimiert. Die Formulierung des Auftrages kann variiert werden, z. B. „Gib an, wie viele Prismen dargestellt sind.“
A _{II}	Eine erhöhte Anforderung stellt hier sicher die Wahl des Körpers (Pyramide) mit einer einhergehenden Betrachtung regelmäßiger und nichtregelmäßiger Realisierungsformen dar. Im Gegensatz zur Aufgabe für den AFB I sind hier durch die Lernenden Realisierungshandlungen auszuführen. Der Anforderungsgrad wird beschränkt durch die Tatsache, dass unvollständige Darstellungen zu vervollkommen sind. Eine erhöhte räumliche Vorstellungskraft wird bereits bei der Vervollständigung des Schrägbildes in der dritten Abbildung abverlangt, erst recht jedoch in den beiden anderen Teilaufgaben. Die Netzdarstellung lässt verschiedene Lösungen zu.
A _{III}	Die Komplexität im Anforderungsprofil der Aufgabe ergibt sich zum einen aus der Verwebung von Identifizierungs- und Realisierungshandlungen, zum anderen aus der Vielfalt möglicher Körperformen, damit korrespondierender gedanklicher Prozesse des räumlichen Vorstellens und schließlich durch die erhöhten Anforderungen des Entwickelns der Schrägbilder. 

³ jedes bei senkrechter Parallelprojektion erzeugte Bild

BEISPIEL 7

Zur Teilkompetenz D 2

Die Schülerinnen und Schüler können aus grafischen Darstellungen (vor allem in Form von Diagrammen) Informationen entnehmen und interpretieren sowie gegebene Daten in grafischer Form darstellen (vor allem als Streifendiagramm, als Kreisdiagramm oder im kartesischen Koordinatensystem)

Aufgabentripel (aus dem Inhaltsbereich STOCHASTIK)

A_I: (vgl. Aufgabe 7, S. 47)

Die Ergebnisse bei einer Klassenarbeit der Klasse 8a führten zu folgendem Notenspiegel:

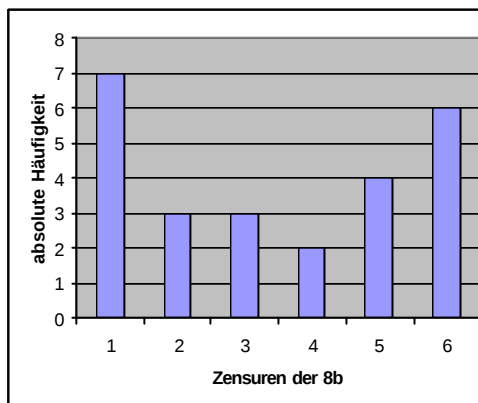
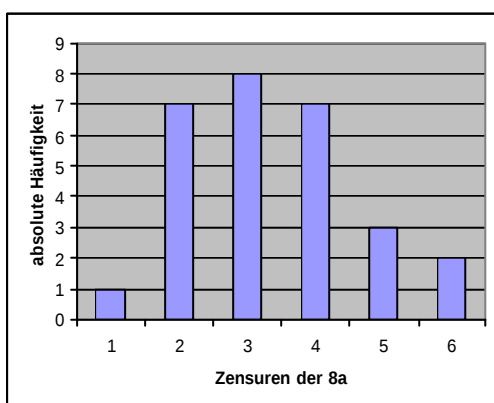
Zensur	1	2	3	4	5	6
Anzahl	1	7	8	7	3	2

- Berechne den Klassendurchschnitt.
- Stelle diese Tabelle in einem Säulendiagramm und in einem Kreisdiagramm dar.

A_{II}: (vgl. Aufgabe 17, S. 49)

In den Klassen 8a und 8b wurde die gleiche Klassenarbeit geschrieben. Die erreichten Ergebnisse sind in den folgenden Diagrammen dargestellt.

- Interpretiere die Diagramme für beide Klassen.
- Ermittle die relativen Häufigkeiten der einzelnen Zensuren (in Prozent) sowie den Durchschnitt jeweils für die 8a und 8b.



A_{III}: (vgl. Aufgabe 22, S. 50)

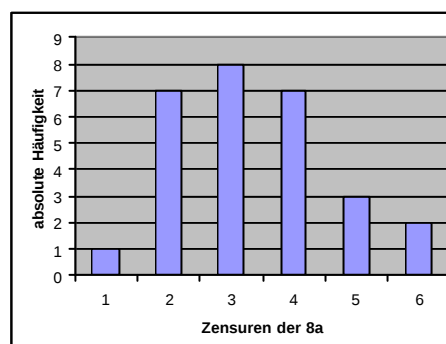
In den Klassen 8a und 8b wurde die gleiche Klassenarbeit geschrieben, wobei jeweils alle 28 Schüler teilnahmen.

Die Ergebnisse der Klasse 8a sind im nebenstehenden Diagramm dargestellt.

Es ist bekannt, dass beide Klassen in etwa den gleichen Zensuredurchschnitt haben. Allerdings bestehen in der Klasse 8b eine breite Leistungsspitze und ein schwaches Mittelfeld. Etwa ein Drittel der Schüler der Klasse 8b zeigen mangelhafte oder sogar ungenügende Leistungen.

Wie könnte die Zensurenverteilung unter diesen Bedingungen bei der Klasse 8b aussehen?

Gib ein mögliches Diagramm für die Zensurenverteilung in der Klasse 8b an.



Kommentar/Sachanalyse

Die Aufgabe A_I (zum AFB I) erfordert das direkte Anwenden gelernter Verfahren (Durchschnitt, Säulendiagramm, Kreisdiagramm), wobei die Daten unmittelbar in Form einer Tabelle gegeben sind.

In der Aufgabe A_{II} (zum AFB II) sind zwei Säulendiagramme zum gleichen Sachverhalt gegeben, die zunächst zu interpretieren sind. *Verteilungen* waren noch kein Behandlungsgegenstand; dennoch können die Schülerinnen und Schüler inhaltlich erschließen, dass in der Klasse 8a ein „breites Mittelfeld“ existiert, während dieses in der 8b eher schwach ausgeprägt ist. Dafür gibt es in der 8b eine stärkere „Spitzengruppe“ und etwa ein Drittel der Schüler, die mangelhafte oder ungenügende Leistungen zeigten.

Zum Berechnen der relativen Häufigkeiten und der Durchschnitte sind die absoluten Häufigkeiten erst aus dem Diagramm abzulesen. Die Ergebnisse zu diesem Aufgabenteil können zweckmäßigerweise in einer Tabelle dargestellt werden (implizite Forderung nach Wechsel der Darstellungsform).

Der Komplexitätsgrad dieser Aufgabe ist deutlich höher als bei der Aufgabe A_I.

Klasse 8a ($n_{8a} = 28$)

	1	2	3	4	5	6
h_a	1	7	8	7	3	2
h_r (%)	3,6	25,0	28,6	25,0	10,7	7,1

Durchschnitt: 3,36

Klasse 8 b ($n_{8b} = 25$)

	1	2	3	4	5	6
h_a	7	3	3	2	4	6
h_r (%)	28	12	12	8	16	24

Durchschnitt: 3,44

Die Schülerinnen und Schüler sollten mit dieser Aufgabe folgende Erfahrung gewinnen: Die Klassenarbeit ist in beiden Klassen trotz eines fast gleichen Durchschnitts doch deutlich verschieden „ausgefallen“. (Derartige Betrachtungen bereiten die Behandlung von Streuungsmaßen vor.)

Die Aufgabe A_{III} (zum AFB III) kehrt die eben geschilderte Problemstellung um: Es ist eine andere Zensurenverteilung (nach gewissen Vorgaben) mit gleichem Durchschnitt zu ermitteln. Dazu gibt es kein direktes, den Schülern bekanntes Verfahren. Man kann (verschiedene richtige) Lösungen durch mehr oder weniger systematisches Probieren finden. Dabei kommt man nicht umhin, auch zwischen den Darstellungsformen Diagramm, Tabelle und Durchschnitt zu wechseln.

Die Schülerinnen und Schüler müssen zu diesem „Problem“ eigenständig ein Lösungsverfahren finden.

Zum Beispiel:

	1	2	3	4	5	6	Durchschnitt
Verteilung Beispiel 1	6	7	3	3	2	7	3,32
Verteilung Beispiel 2	6	6	3	3	4	6	3,39

Das Erfüllen der Anforderungen in der Aufgabe A_I gehört zu den Basiskompetenzen, die im Unterricht vielfältig zu üben sind. Eine Variation erfolgt hier im Wesentlichen durch verändertes Zahlenmaterial bzw. andere Sacheinbettungen (z. B. Durchschnittsalter von Kinobesuchern, Durchschnittsgröße aller Schüler einer Klasse).

Bei aller Vielfalt handelt es sich hier stets um „Reproduktionsleistungen“ zu den Darstellungsformen Tabelle, Streifen- und Kreisdiagramm sowie Durchschnitt.

In Aufgabe A_{II} werden Anforderungen gestellt, die deutlich über das „Reproduzieren“ hinausgehen. Verschiedene Standardverfahren sind in einem neuen Zusammenhang zu „reorganisieren“: Ablesen der absoluten Häufigkeiten; Überführen eines Diagramms in eine Tabelle (eine „Umkehrung“ der Standardaufgabe „Tabelle → Diagramm“), Berechnen der relativen Häufigkeiten. Schließlich fordert das vergleichende Interpretieren ein Verknüpfen verschiedener Kenntnisse.

Wie die Analyse zu Aufgabe A_{II} zeigt, gibt es dafür kein direktes Lösungsverfahren. In der Regel sind derartige Aufgaben auch nicht oder wenig geübt. Hier eine angemessene Vorgehensweise zu finden und darzustellen, stellt Anforderungen, die in den AFB III „eigenständige Problemlösungen“ gehören. Hinzu kommt, dass es verschiedenen Lösungen gibt.

Bei solchen Aufgaben kommt es besonders darauf an, dass im Unterricht die Schüler zur Reflexion über die Lösungen und über die Lösungswege angehalten werden, z. B. über solche Fragen wie:

- Weshalb benötigt man den Durchschnitt der Klasse 8a für das Lösen der Aufgabe?
- Wie wurden mögliche Verteilungen ermittelt?
- Warum gibt es hier mehr als nur eine Lösung?