Zeichnerisches Darstellen im Mathematikunterricht: Skizzieren - Zeichnen - Konstruieren

Der Entwicklung von Fähigkeiten der Lernenden im zeichnerischen Darstellen kommt im Mathematikunterricht (vgl. auch die allgemeine mathematische Kompetenz D1: **Verfahren zur Darstellung geometrischer Objekte anwenden** und umgekehrt aus derartigen Darstellungen Vorstellungen von diesen Objekten gewinnen) eine gleich hohe Bedeutung zu wie anderen Kompetenzen auch. Diese Bedeutung ergibt sich zum Einen als Beitrag zur allgemeinen Lebensvorbereitung, vor allem durch

- Visualisieren von Objekten bzw. von Zusammenhängen aus der Umwelt,
- Lesen bildlicher Darstellungen,
- Entwickeln feinmotorischer Fähigkeiten sowie von Fähigkeiten im Umgang mit Zeichengeräten,
- Entwickeln von Fähigkeiten und Bereitschaften zu Sorgfalt und Genauigkeit.

Zum Anderen dient das zeichnerische Darstellen der Entwicklung fachspezifischer Fähigkeiten, vor allem:

- dem Ordnen und Anordnen von Informationen, z. B. in einer Planfigur,
- der Raumvorstellung und dem „räumlichen Denken“,
- dem algorithmischen Arbeiten (etwa durch Entwickeln bzw. Ausführen einer Konstruktionsbeschreibung).

Damit dient zeichnerisches Darstellen der Entwicklung von Problemlösekompetenz im weitesten Sinne.

Beim zeichnerischen Darstellen wird zwischen Skizzieren, Zeichnen und Konstruieren unterschieden. Offenkundig ist, dass Skizzieren sich deutlich von Aufforderungen zum Zeichnen bzw. Konstruieren abhebt. Zeichnen und Konstruieren liegen nahe beieinander, doch soll die Wahl des jeweils verwendeten Wortes schon Unterschiede zum Ausdruck bringen[1]. Im Folgenden sollen diese drei Aufforderungen voneinander abgegrenzt werden.

Zum SKIZZIEREN

Skizzieren ist in der Regel ein Freihandzeichnen ohne Anspruch auf Maßstäblichkeit. Gleichwohl sollen wesentliche Informationen des Dargestellten (z. B. Lagebeziehungen, Bezeichnungen, Sichtbarkeit) sachgerecht widergespiegelt werden.

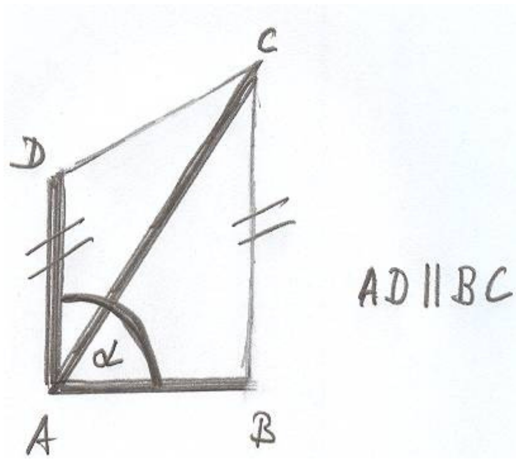
---

[1] So verwendet man als Aufforderung Formulierungen wie „Zeichne eine Strecke (einen Kreis) …“; man sagt aber nicht „Konstruiere eine Strecke (einen Kreis) …“.

Die Bedeutung des Skizzierens, vor allem auch im Sinne einer „Handskizze", ist nicht gering zu schätzen. Geometrische Existenzaussagen können z. B. mit einer Skizze eindrucksvoll unterstützt werden, ohne dass es einer aufwändigen Konstruktion bedarf.[2] Skizzen unterstützen im besonderen Maße das Zusammentragen und Ordnen wesentlicher Informationen, fordern und entwickeln das Vorstellungsvermögen und tragen so zum Finden von Lösungsideen bei. Dem nicht selten auftretenden Einwand, dass freihändige Skizzen nicht „ordentlich" genug seien oder zu wenig brauchbaren Darstellungen führen, ist mit dem Hinweis darauf zu begegnen, dass auch die Fähigkeit des Skizzierens im Mathematikunterricht erworben werden muss. Dazu gehört ganz Elementares: die richtige Bleistiftführung, die Bewegung des Bleistifts aus dem Unterarm heraus; die Verfügbarkeit brauchbaren „Handwerkzeugs".

Planfiguren sind eine spezielle Form von Skizzen.

Planfiguren werden in der Regel vor Durchführung einer Konstruktion angefertigt. Das gesuchte Objekt wird skizziert (eine „ordentliche" Handskizze reicht!) und die gegebenen Stücke werden markiert (z. B. andersfarbig oder fett hervorgehoben), wobei auch Größenverhältnisse, ggf. auch Lage dem gesuchten Objekt qualitativ entsprechen sollen. Insbesondere sind Bezeichnungen vorzunehmen.

Beispiel	Planfigur
Konstruiere ein Trapez ABCD mit $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ aus den folgenden Stücken: $\alpha = 90°$; $\overline{AB} = 2{,}5$ cm ; $\overline{AD} = 4{,}0$ cm; $\overline{AC} = 6{,}5$ cm	

Zum KONSTRUIEREN

Zum Wort *Konstruieren* werden in Lexika vielfältige Bedeutungen angeführt. Der Vorstellung von Konstruieren in der Mathematik kommt die im technischen Bereich gepflegte

[2] Die Genauigkeit einer vermittels Skizzierens gefundenen Lösung muss nicht zwangsläufig ungenau sein; man denke nur an den Unterschied, den Mittelpunkt einer 5 cm und den einer 4 mm langen Strecke ermitteln zu müssen.

Interpretation des Planens, des Entwerfens oder des Projektierens von Objekten wohl am nächsten, bedeutet es doch, sich etwas theoretisch zu überlegen bzw. auszudenken.

***Konstruieren** im mathematischen Sinn ist eine Tätigkeit, die mit idealen Objekten „im Geiste“ durchgeführt wird.*[3] *Jede Konstruktion (im Sinne einer realen Darstellung) ist nur eine Annäherung an diesen idealen Fall.*

Konstruieren im Mathematikunterricht meint immer die *Bearbeitung einer Konstruktionsaufgabe* durch Anfertigung einer Zeichnung mit zugelassenen Hilfsmitteln[4]. Das Bearbeiten („Lösen“) der Konstruktionsaufgabe unterteilt sich in das Finden der Konstruktion (Aufeinanderfolge von Konstruktionsschritten im Sinne einer Konstruktionsbeschreibung) und in das Ausführen der Konstruktion (das „praktische“ Konstruieren). Die eigentliche mathematische Tätigkeit ist das Finden der „Konstruktionsschrittfolge“. Diese Phase ist sehr häufig heuristischer Natur, wenn den Schülerinnen und Schülern zur Konstruktionsaufgabe kein Konstruktionsalgorithmus bekannt ist. Das Ausführen der Konstruktionsschritte, also das zeichnerische Herstellen der gesuchten geometrischen Figur, ist dann „nur“ noch die Realisierung der gefundenen mathematischen Idee. Die Konstruktionsbeschreibung wird im Mathematikunterricht nicht immer schriftlich fixiert. Der Determination wird besonders bei der Erstbehandlung von Aufgabenklassen (z. B. Dreieckskonstruktionen nach den Kongruenzsätzen) Beachtung gewidmet.

Im Mathematikunterricht hat es sich eingebürgert, dass Konstruktionsbeschreibungen oder Aussagen zur Konstruierbarkeit und Eindeutigkeit oft explizit in Aufträgen gefordert werden, sofern entsprechende Kompetenzen entwickelt oder überprüft werden sollen.

Zum ZEICHNEN

Wie bereits weiter oben angeführt, haben die Begriffe *Konstruieren* und *Zeichnen* viele Gemeinsamkeiten. Aus rein mathematischer Sicht ist der Unterschied bereits beschrieben: Das Konstruieren ist primär ein gedankliches Operieren mit ideellen Objekten, während Zeichnen das Anfertigen einer realen Darstellung ist.

Da das Konstruieren im Mathematikunterricht das Bearbeiten einer Konstruktionsaufgabe mit dem Ergebnis „zeichnerische Darstellung“ meint und dabei in der Unterrichtspraxis nicht immer alle Teilprozesse schriftlich fixiert werden, wird nicht selten Zeichnen und

---

[3] Schon für EUKLID war in seinen „Elementen“ die theoretische Möglichkeit der Darstellung eines geometrischen Ortes (Gerade, Kreis) wichtiger als die tatsächliche Ausführung.

[4] In der EUKLIDISCHEN Geometrie sind dies Zirkel und Lineal (Lineal ohne Messskala). Im Mathematikunterricht sind weitere Hilfsmittel zugelassen: Verschiedene Zeichendreiecke, Winkelmesser, zuweilen auch Parallelenschablonen. Im Geodreieck sind mehrere Hilfsmittel zu einem zusammengefasst.

Konstruieren synonym verwendet. Zuweilen sind aber auch ganz bewusst Unterschiede mit der Verwendung der Termini „Zeichnen“ bzw. „Konstruieren“ verbunden.

Aspekte zum Abgrenzen von Zeichnen und Konstruieren

1. Eine Aufforderung zum Zeichnen unterstellt im Allgemeinen Kenntnisse über das Darzustellende wie auch relativ sichere Verfahrenskenntnisse zur Anfertigung der Zeichnung.

Dies kommt z. B. häufig bei Aufforderungen in der Darstellenden Geometrie vor. Eine Aufforderung zum *Zeichnen*[5] von Grund- und Aufriss eines Quaders (oder seines Schrägbildes) setzt in der Regel die Kenntnis über die wesentlichen zu berücksichtigenden Eigenschaften des darzustellenden Körpers voraus. Sobald die Anforderungen bezüglich des Darzustellenden komplexer werden, wird in der Regel vom Konstruieren gesprochen, z. B.: Konstruiere die Schnittfigur in wahrer Größe und Gestalt.

2. *Bei der Behandlung geometrischer Sätze oder Konstruktionsalgorithmen sowie deren Nutzung im Unterricht gibt es unterschiedliche Sichtweisen - je nach didaktischer Zielstellung oder Einbindung in den Gesamtlehrgang des Mathematikunterrichts.*

Besonders deutlich wird dies bei den Grundkonstruktionen.

Bei ihrer erstmaligen Behandlung (z. B. Fällen des Lotes von einem Punkt auf eine Gerade) steht die Ideenfindung im Vordergrund, wie man ohne Winkelmesser oder Dreieck, nur mit Zirkel und Lineal eine Lotgerade „erzeugen“ kann. Grundlegende Eigenschaften, wie die Symmetrie, sollen bei der Entwicklung einer Lösungsidee verfestigt, die Strategie, zu konstruierende Punkte als Elemente verschiedener Punktmengen zu interpretieren, vorbereitet werden. Nach der Ideenfindung wird dieses Verfahren auch unter ausschließlicher Verwendung von Zirkel und Lineal gefestigt. Hier steht das Konstruieren im eigentlichen Sinne im Mittelpunkt.

Im weiteren Unterricht sind beim Lösen von Konstruktionsaufgaben (z. B. Konstruktion des Umkreises von einem Dreieck ABC) häufig in einzelnen Konstruktionsschritten Grundkonstruktionen anzuwenden (hier z. B. Errichten von Mittelsenkrechten). Diese stellen dann in der „großen“ Konstruktionsaufgabe einen Unteralgorithmus (Modul) dar, der nicht weiter in Teilschritte aufgegliedert wird. Für die Konstruktionshandlung bzw. -beschreibung ist nur relevant etwa vom „Errichten der Mittelsenkrechten zur Strecke $\overline{AB}$“ zu sprechen. Diese „Verkürzung“ legitimiert auch, dass die Konstruktion der Mittelsenkrechten mithilfe eines

[5] Nicht selten wird hierbei auch das Signalwort „**Stelle** den Körper x als Schrägbild / im Zweitafelbild … **dar**!“ verwendet.

Geodreiecks erfolgen kann[6]. Ein Lot ist eben z. B. mit einem Geodreieck schneller und i. Allg. genauer als mit Zirkel und Lineal gefällt; das schafft Zeit und fördert die Konzentration auf die eigentliche Aufgabe. Dieser Aspekt verdient auch mit Blick auf die Existenz dynamischer Geometriesoftware (z. B. GEONEXT)[7] entsprechende Beachtung. Hier ist modulares Konstruieren durchgängiges Prinzip und ihre Verwendung fördert entsprechende Arbeitsweisen. Geometriesoftware hat aus didaktischer Sicht noch weitere Vorteile: Zum einen muss dem PC jeder Konstruktionsschritt mitgeteilt werden, also eine Konstruktionsbeschreibung steht im Mittelpunkt. Andererseits werden diese Konstruktionsschritte sofort visualisiert und somit z. B. Unkorrektheiten unmittelbar sichtbar.

3. *Beim Lösen von Konstruktionsaufgaben birgt das bewusste Variieren der zugelassenen oder vorgeschriebenen Hilfsmittel spezifische Potenzen hinsichtlich der Kompetenzentwicklung.*
Je nach didaktischer Intention kann es sinnvoll sein, bei Konstruktionsaufgaben Einschränkungen bei den Hilfsmitteln vorzunehmen oder auch ganz spezielle Hilfsmittel vorzuschreiben.[8] Insbesondere das Finden von Ideen kann durch Nutzung dynamischer Geometriesoftware unterstützt werden.

Aus diesen Darlegungen folgt für die Unterrichtspraxis:

- Wenn von Konstruieren im Mathematikunterricht die Rede ist, ist damit keineswegs automatisch die Beschränkung auf Zirkel und Lineal verbunden.
- Das Einschränken bei der Verwendung der Hilfsmittel kann in einem bestimmten Unterrichtszusammenhang sinnvoll sein. Dann ist dies in der Aufgabe explizit zu benennen (z. B: „Konstruiere den Umkreis des Dreiecks ABC nur unter Verwendung von Zirkel und Lineal.“).
- Beim Signalwort Zeichnen wird in der Regel ein vertrautes Darstellungsverfahren oder Zeichenobjekt unterstellt. Es handelt sich im mathematischen Sinne eben nicht um eine Konstruktionsaufgabe.

[6] Auch EUKLID verwendete Module, indem er immer wieder auf bereits gelöste Konstruktionsaufgaben verwies.
[7] Diese Software steht kostenlos mit einer Vielzahl von aufbereiteten Unterrichtsvorschlägen zur Verfügung. (siehe: http://geonext.uni-bayreuth.de/).
[8] Dazu können auch weitere Forderungen gehören, z. B. dass Konstruktionen auf unliniertem Papier anzufertigen sind, dass auf Strichstärken (z. B: Hilfslinien dünn absetzen) zu achten ist.

KONSTRUKTIONSBESCHREIBUNGEN

Das Beschreiben von Konstruktionen hat im Mathematikunterricht gerade deswegen eine große Bedeutung, weil es einerseits relativ hohe Ansprüche an die geistige Trätigkeit der Lernenden stellt, müssen sie doch eine in der Regel mehrschrittige Handlung geistig vorwegnehmen und „allgemein“ in Worte fassen. Andererseits ist der Zusammenhang zwischen Beschreibung und Tätigkeitsprodukt ziemlich unmittelbar herstellbar, so dass hier gute Möglichkeiten bestehen, das präzise Beschreiben zu üben.

Im Lehrplan der Sekundarschule ist die angestrebte Kompetenzentwicklung wie folgt ausgewiesen:

a) Innerhalb der allgemeinen mathematischen Kompetenz D4 „Überlegungen und Lösungswege darstellen“ (siehe Erprobungslehrplan S. 15):
   - Sjg. 5/6: Konstruktionsschritte beschreiben
   - Sjg. 7/8: Konstruktionen mit normierten Wendungen beschreiben
   - Sjg. 9/10: Lösungsdarstellungen reflektieren

b) Als inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen bei den Kompetenzschwerpunkten im Kapitel 3 des Erprobungslehrplans:

Sjg.	Kompetenzschwerpunkt	Kompetenz, Wissensbestände
5/6	Geometrische Grundbegriffe und Symmetrie	- Lagebeziehungen von Geraden beschreiben - Winkel bezeichnen - Spiegelbilder konstruieren und das Vorgehen beschreiben
	Winkelbeziehungen	- Winkelpaare beschreiben
	Dreiecke	- Dreiecke bezeichnen - Dreieckskonstruktionen nach Beschreibungen ausführen - Ausführbarkeit und Eindeutigkeit von Dreieckskonstruktionen beurteilen - Planfigur, Konstruktionsbeschreibung
7/8	Vierecke	- Vierecke bezeichnen - Eigenschaften von Vierecken bezüglich ihrer Seiten, Winkel und Symmetrie beschreiben - Konstruktionsschritte bei Viereckskonstruktionen beschreiben
	Kreise	- Kreise bezeichnen - innermathematische Anwendungsaufgaben lösen (hier auch: Satz des Thales beim Konstruieren anwenden und Konstruktionen beschreiben)
	Körperdarstellung	- Körpermodelle beschreiben
	Rechtwinklige Dreiecke	- innermathematische Anwendungsaufgaben lösen (hier auch: spezielle rechtwinklige Dreiecke konstruieren und Konstruktion beschreiben)
9/10	Ähnlichkeit	- innermathematische Anwendungsaufgaben lösen (hier auch: spezielle Konstruktionsaufgaben zu lösen)

Bei den Konstruktionsbeschreibungen ist es zweckmäßig, das Zeichnen und das Bezeichnen zu unterscheiden. Ferner ist es nützlich, ja unumgänglich, die Lernenden sehr frühzeitg an das Verwenden „normierter"[9] Wendungen zu gewöhnen.

Beispiele für „normierte" Wendungen
- Die Strecke $\overline{AB}$ zeichnen. (auch: Ich zeichne die Strecke …) - Die Strecke $\overline{AB}$ halbieren und ihren Mittelpunkt mit M bezeichnen. - Den Kreis um A mit dem Radius r = $\overline{AB}$ zeichnen. - Die Parallele zu b durch den Punkt A zeichnen und diese mit a bezeichnen. - Das Lot vom Punkt H auf die Gerade g fällen und den Lotfußpunkt mit F bezeichnen. - Den Winkel $\alpha = 40°$ in A an $\overline{AB}$ antragen.

Durch konsequente Verwendung dieser Wendungen kann nach und nach erreicht werden, dass die Lernenden bei Konstruktionsbeschreibungen nicht mehr die realen Handlungen (z. B. „Ich nehme das Lineal und zeichne eine Gerade" … oder „Ich nehme den Zirkel und steche in den Mittelpunkt und schlage einen Kreisbogen …") betonen.

In der Unterrichtspraxis haben sich Konstruktionsbeschreibungen in Form von Schrittfolgen bewährt.

Aufgabe: (siehe Beispielaufgabe von Seite 2) Konstruiere ein Trapez ABCD mit $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ aus den folgenden Stücken: $\alpha = 90°$; $\overline{AB} = 2{,}5$ cm ; $\overline{AD} = 4{,}0$ cm; $\overline{AC} = 6{,}5$ cm Beschreibe die Konstruktion.
Konstruktionsbeschreibung: (1) Strecke $\overline{AB}$ zeichnen und die Endpunkte mit A und B bezeichnen (2) Im Punkt A die Senkrechte zur Strecke $\overline{AB}$ errichten (3) Auf dieser Senkrechten von A aus die Strecke $\overline{AD}$ antragen und den Endpunkt mit D bezeichnen (4) Die Parallele zur Strecke $\overline{AD}$ durch den Punkt B zeichnen (5) Kreis um A mit dem Radius r = $\overline{AC}$ zeichnen; Schnittpunkt des Kreises mit der Parallelen mit C bezeichnen Es ist das Trapez ABCD entstanden.[10]

[9] Die Anführungszeichen werden deshalb verwendet, da es eine Norm im wörtlichen Sinne dafür nicht gibt, wohl aber präzise fachsprachliche Wendungen.

[10] Im Schritt (3) gibt es zwei Lösungen, ebenso bei Schritt (5). Bei strenger Beachtung der üblichen Bezeichnung für die Eckpunkte eines Vierecks entstehen zwei zueinander kongruente Trapeze.