

# Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan Mathematik Gymnasium

„Drachen“

(Schuljahrgänge 5/6)

(Arbeitsstand: 04.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an [petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de](mailto:petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de)

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

|                        |                                |
|------------------------|--------------------------------|
| Petra Behling          | Halle (Leitung der Fachgruppe) |
| Thomas Brill           | Schulpforte                    |
| Uta Fliegner-Hoppstock | Osterburg                      |
| Antje Noack            | Halberstadt                    |
| Udo Piper              | Wittenberg                     |

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:  
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung  
Sachsen-Anhalt  
Riebeckplatz 09  
06110 Halle



Die vorliegende Publikation, mit Ausnahme der Quellen Dritter, ist unter der „Creative Commons“-Lizenz veröffentlicht.

 CC BY-SA 3.0 DE

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/>

Sie dürfen das Material weiterverbreiten, bearbeiten, verändern und erweitern. Wenn Sie das Material oder Teile davon veröffentlichen, müssen Sie den Urheber nennen und kennzeichnen, welche Veränderungen Sie vorgenommen haben. Sie müssen das Material und Veränderungen unter den gleichen Lizenzbedingungen weitergeben.

Die Rechte für Fotos, Abbildungen und Zitate für Quellen Dritter bleiben bei den jeweiligen Rechteinhabern, diese Angaben können Sie den Quellen entnehmen. Der Herausgeber hat sich intensiv bemüht, alle Inhaber von Rechten zu benennen. Falls Sie uns weitere Urheber und Rechteinhaber benennen können, würden wir uns über Ihren Hinweis freuen.

## Aufgabe „Drachen“

Lisa und Paul haben eine Bauanleitung (siehe Anlage) im Internet gefunden und möchten einen Drachen bauen.

Merke:

Ein Viereck mit einer Symmetrieachse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte heißt Drachenviereck.

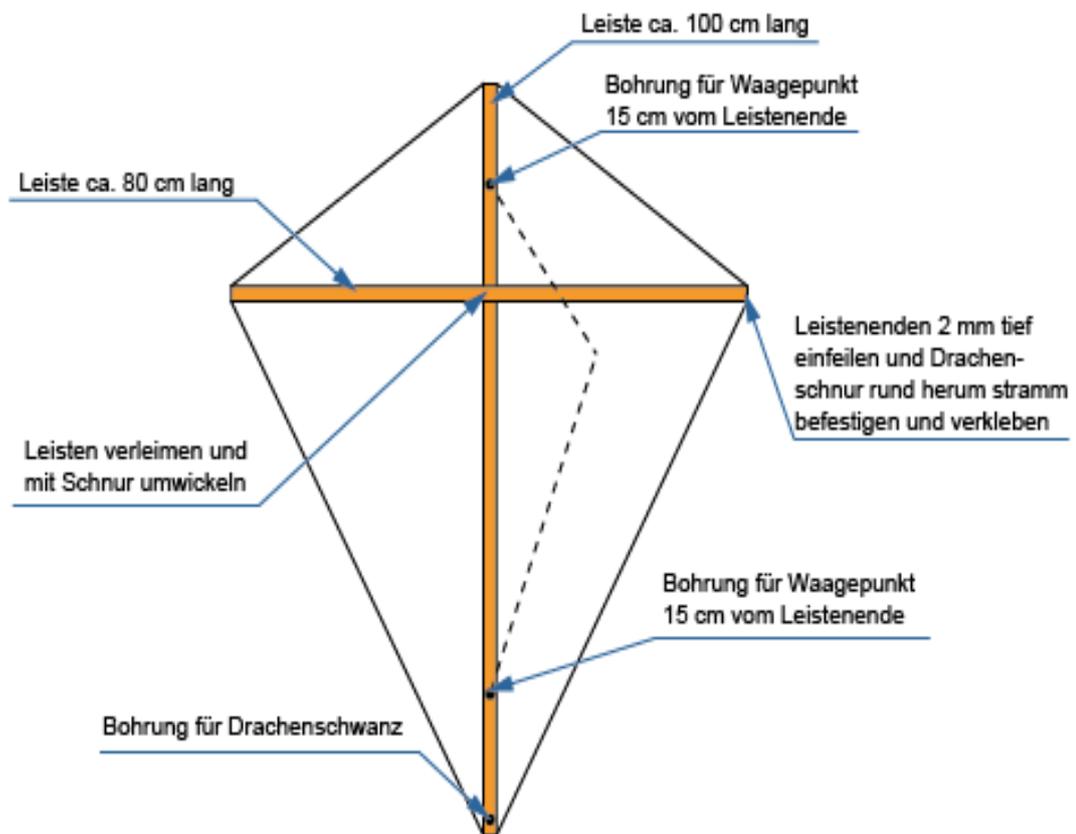
- 1a) Zeichne ein Viereck ABCD mit  $A(3 | 1)$ ,  $B(5 | 4)$ ,  $C(3 | 6)$  und  $D(1 | 4)$  in ein rechtwinkliges Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 1 cm).  
Zeige, dass das Viereck ABCD ein Drachenviereck ist.
- 1b) Das Viereck ABCD ist eine maßstäbliche Darstellung des Drachens in der Bauanleitung. Gib den Maßstab an.
- 2a) Zeichne zwei weitere beliebige Drachenvierecke in ein rechtwinkliges Koordinatensystem und gib jeweils die Koordinaten der Eckpunkte an.
- 2b) Ermittle für jedes Drachenviereck die Seitenlängen und die Größe der Innenwinkel.  
Formuliere Vermutungen über Eigenschaften von Drachenvierecken.
- 2c) Paul behauptet:  
„Der Umfang jedes Drachenvierecks ergibt sich aus dem Doppelten der Summe zweier Seitenlängen.“  
Beurteile diese Aussage.

Für den Bau des Drachens stehen alle Leisten doppelt zur Verfügung.

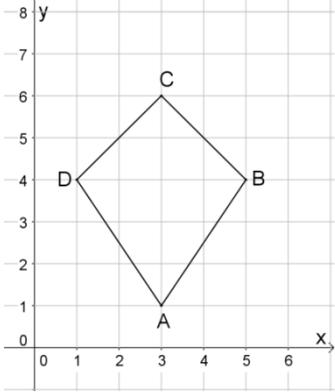
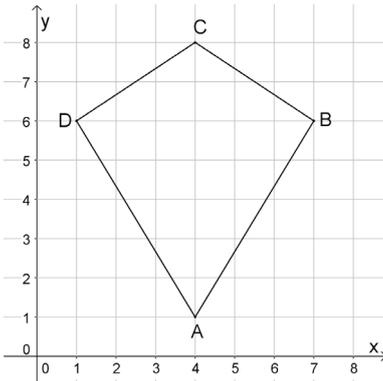
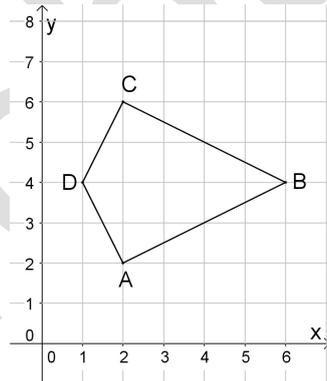
Lisa und Paul vermuten, dass der Papierbedarf zum Bespannen des Drachens von der Lage der Leisten zueinander abhängt und entwerfen mithilfe der Bauanleitung unterschiedliche Drachen.

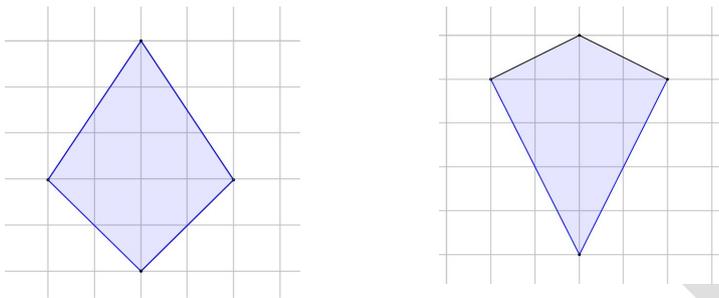
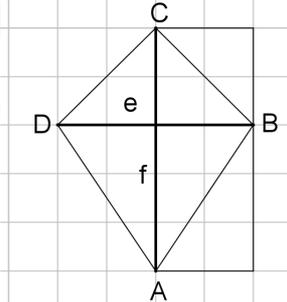
- 3a) Stelle zwei mögliche Drachen maßstäblich dar.
- 3b) Berechne den Flächeninhalt dieser Drachen.
- 3c) Untersuche den Flächeninhalt eines Drachenvierecks in Abhängigkeit von der Lage des Schnittpunktes der Diagonalen.  
Nutze dafür die folgende Datei:  
„Das Drachenviereck und sein Flächeninhalt“ unter [www.bildung-lsa.de](http://www.bildung-lsa.de).
- 3d) Leite eine Formel für die Berechnung des Flächeninhaltes eines Drachenvierecks her.
4. Gestalte eine Übersicht zu den Eigenschaften von Drachenvierecken.

## Anlage: Bauanleitung für einen Drachen



**Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung**

| Aufg.                                  | Hinweise zur Lösung  | AFB I        | AFB II | AFB III                                |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
|--|--|--------------|--------|--|--|--|--|--|---|--|--|--------------|--------|--|----------------------------------|--|--|--|----------------------------------|--|---|--|---|--|
| 1a                                     | <p>Zeichnen, z. B.:</p>  <p>Zeigen, z. B.:<br/>Symmetrieachse einzeichnen</p>   | x            |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| 1b                                     | <p>Angeben, z. B.:<br/>Maßstab 1 : 20</p>  |              | x      |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| 2a                                     | <p>Zeichnen und Angeben, z. B.:</p> <p>Drachenviereck 1</p>  <p>Drachenviereck 2</p>  <p>A(4   1), B(7   6), C(4   8),<br/>D(1   6)</p> <p>A(2   2), B(6   4), C(2   6),<br/>D(1   4)</p>   |              | x      |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| 2b                                     | <p>Ermitteln, z. B.:</p> <table border="1" data-bbox="295 1500 702 1736"> <thead> <tr> <th>Seitenlängen</th> <th>Winkel</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\overline{AB} \approx 5,8 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle BAD \approx 62^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\overline{BC} \approx 3,6 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle CBA \approx 93^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\overline{CD} \approx 3,6 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle DCB \approx 112^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\overline{AD} \approx 5,8 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle ADC \approx 93^\circ</math></td> </tr> </tbody> </table> <table border="1" data-bbox="734 1500 1133 1736"> <thead> <tr> <th>Seitenlängen</th> <th>Winkel</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\overline{AB} \approx 4,5 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle BAD = 90^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\overline{BC} \approx 4,5 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle CBA \approx 53^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\overline{CD} \approx 2,2 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle DCB = 90^\circ</math></td> </tr> <tr> <td><math>\overline{AD} \approx 2,2 \text{ cm}</math></td> <td><math>\sphericalangle ADC \approx 127^\circ</math></td> </tr> </tbody> </table> <p>Formulieren, z. B.:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- Ein Drachenviereck hat zwei Paare gleich langer benachbarter Seiten.</li> <li>- Bei einem Drachenviereck sind zwei einander gegenüberliegende Innenwinkel gleich groß.</li> <li>- ...</li> </ul> | Seitenlängen | Winkel | $\overline{AB} \approx 5,8 \text{ cm}$ | $\sphericalangle BAD \approx 62^\circ$ | $\overline{BC} \approx 3,6 \text{ cm}$ | $\sphericalangle CBA \approx 93^\circ$ | $\overline{CD} \approx 3,6 \text{ cm}$ | $\sphericalangle DCB \approx 112^\circ$ | $\overline{AD} \approx 5,8 \text{ cm}$ | $\sphericalangle ADC \approx 93^\circ$ | Seitenlängen | Winkel | $\overline{AB} \approx 4,5 \text{ cm}$ | $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ | $\overline{BC} \approx 4,5 \text{ cm}$ | $\sphericalangle CBA \approx 53^\circ$ | $\overline{CD} \approx 2,2 \text{ cm}$ | $\sphericalangle DCB = 90^\circ$ | $\overline{AD} \approx 2,2 \text{ cm}$ | $\sphericalangle ADC \approx 127^\circ$ |  | x |  |
| Seitenlängen                           | Winkel   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{AB} \approx 5,8 \text{ cm}$ | $\sphericalangle BAD \approx 62^\circ$   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{BC} \approx 3,6 \text{ cm}$ | $\sphericalangle CBA \approx 93^\circ$   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{CD} \approx 3,6 \text{ cm}$ | $\sphericalangle DCB \approx 112^\circ$  |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{AD} \approx 5,8 \text{ cm}$ | $\sphericalangle ADC \approx 93^\circ$   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| Seitenlängen                           | Winkel   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{AB} \approx 4,5 \text{ cm}$ | $\sphericalangle BAD = 90^\circ$   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{BC} \approx 4,5 \text{ cm}$ | $\sphericalangle CBA \approx 53^\circ$   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{CD} \approx 2,2 \text{ cm}$ | $\sphericalangle DCB = 90^\circ$   |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
| $\overline{AD} \approx 2,2 \text{ cm}$ | $\sphericalangle ADC \approx 127^\circ$  |              |        |  |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |
|  |  |              |        | x                                      |  |  |  |  |   |  |  |              |        |  |                                  |  |  |  |                                  |  |   |  |   |  |

| Aufg. | Hinweise zur Lösung  | AFB I | AFB II | AFB III |
|-------|--|-------|--------|---------|
| 2c    | Beurteilen, z. B.:<br>Die Aussage ist falsch.<br>Der Umfang des Drachenvierecks 1 beträgt rund 18,8 cm.<br>Das Doppelte der Summe zweier Seiten beträgt z. B.<br>$2 \cdot 5,8 \text{ cm} = 11,6 \text{ cm}$ . Das ist ein Widerspruch.   |       |        | x       |
| 3a    | Darstellen, z. B.:<br>Maßstab 1 : 20<br>   |       | x      |         |
| 3b    | Berechnen, z. B.:<br>Zerlegung in zwei Dreiecke; $A = 4000 \text{ cm}^2$   |       | x      |         |
| 3c    | Untersuchen, z. B.:<br>Die Länge der Diagonalen bleibt gleich.<br>Verschiebt man eine der beiden Diagonalen entlang der anderen, bleibt der Flächeninhalt gleich.  |       | x      |         |
| 3d    | Herleiten, z. B.:<br>Diagonalen e, f im Drachenviereck ergänzen dieses zu einem Rechteck mit den Seitenlängen $a = \frac{1}{2}e$ und $b = f$<br>$A = a \cdot b$<br>$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$<br> |       |        | x       |
| 4     | Gestalten, z. B.:<br>Mindmap (siehe Anlage)  |       | x      |         |

**Anlage: Mindmap**

Aus datenschutzrechtlichen Gründen entfernt.

Erprobung

## **Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz**

Gegenstand der Aufgabe ist die Erarbeitung der Eigenschaften von Drachenvierecken sowie die Herleitung der Berechnungsformel für den Flächeninhalt eines Drachenvierecks. Für die Bearbeitung der ersten drei Aufgabenteile wird eine Doppelstunde empfohlen.

In der Auswertungsphase ist darauf zu achten, dass die Schülerinnen und Schüler logische Bestandteile der Sprache sachgerecht gebrauchen und den Wahrheitsgehalt der von ihnen formulierten Aussagen prüfen. Dementsprechend ist genügend Zeit für diese Diskussionsphase einzuplanen. Für die Erstellung der Übersichten, deren Präsentationen und die Diskussionen der Schülerarbeiten wird eine weitere Unterrichtsstunde empfohlen. Die in der Anlage dargestellte Mindmap stammt aus einer Lerngruppe, die mit der selbstständigen Erarbeitung einer Übersicht keine großen Erfahrungen hat. In ihr ist zu erkennen, dass trotz Diskussion der Schülerergebnisse mathematische Inhalte ungenau formuliert wurden und eine intensive Auswertung der erstellten Übersichten notwendig machen.

## **Variationsmöglichkeiten**

### **Aufgabe:**

Ein Drachen hat die Form eines Drachenvierecks.

Findet anhand der selbstgebauten Drachen Eigenschaften, die für ein Drachenviereck charakteristisch sind. erinnert euch dabei an die Merkmale bereits bekannter Vierecke.

Überprüft die gefundenen Eigenschaften an anderen Drachenvierecken.

Formuliert allgemeine Aussagen über diese Vierecksart.

Stellt eure Ergebnisse im Plenum vor und diskutiert diese Aussagen.

Erstellt anschließend eine Übersicht über die Eigenschaften des Drachenvierecks.

### Anmerkungen zur Aufgabe:

Als Alternative zu der vorgestellten „Drachenaufgabe“ kann der Bau eines Drachens im Vorfeld realisiert werden. Dies lässt sich fächerübergreifend organisieren, z. B. könnte der Drachenbau im Deutschunterricht als Grundlage für eine Vorgangsbeschreibung (hier Bauanleitung) dienen. Die selbstgebauten Drachen nutzen die Schülerinnen und Schüler anschließend im Mathematikunterricht, um selbstständig mathematische Eigenschaften von Drachenvierecken herauszufinden.

Im Mittelpunkt dieser Variante steht das selbstständige Erarbeiten von Eigenschaften, auf die schrittweise Hinführung sollte daher weitestgehend verzichtet werden.

Die Aufgaben 1 bis 3 der „Drachenaufgabe“ können im Anschluss an die Erarbeitung zur Ergebnissicherung genutzt werden.

### Aufgabe „Drachen“

| Art der Aufgabe | Hilfsmittel | Arbeitszeit | Schuljahrgänge |
|-----------------|-------------|-------------|----------------|
| Lernaufgabe     | CAS         | 135 min     | 5/6            |

#### Einordnung in den Fachlehrplan

|   |
|---|
| <p><u>Kompetenzschwerpunkte</u></p> <p>Größen<br/>Geometrische Grundbegriffe und Abbildungen<br/>Vierecke</p>   |
| <p><u>zu entwickelnde mathematische Kompetenzen</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Grundprinzip des Messens nutzen</li> <li>– geometrische Figuren im Koordinatensystem darstellen</li> <li>– Eigenschaften von speziellen Vierecken bezüglich ihrer Seiten, Diagonalen, Winkel und Symmetrie beschreiben</li> <li>– Aussagen über Vierecke durch Zurückführen auf Dreiecke begründen</li> <li>– besondere Linien (Diagonalen, Symmetrieachsen) in Vierecke einzeichnen</li> <li>– Umfang und Flächeninhalt von speziellen Vierecken berechnen</li> </ul> |
| <p><u>Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen</u></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– Maßstab</li> <li>– Punkt, Gerade, Strecke, Lagebeziehungen</li> <li>– rechtwinkliges Koordinatensystem, Koordinaten von Punkten</li> <li>– Winkel, Symbole: <math>\sphericalangle ABC</math></li> <li>– Symmetrieachse</li> <li>– Umfang, Flächeninhalt</li> <li>– Drachenviereck</li> <li>– Diagonale</li> </ul>  |

#### Einordnung in das Kompetenzmodell

| Aufg. | inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen   |   |   |   | allgemeine mathematische Kompetenzen |          |          |          | AFB      |           |            |
|-------|---|---|---|---|--------------------------------------|----------|----------|----------|----------|-----------|------------|
|       |  |  |  |  | <b>P</b>                             | <b>M</b> | <b>A</b> | <b>D</b> | <b>I</b> | <b>II</b> | <b>III</b> |
| 1a    |   | x   |   |   | 3, 6                                 |          |          |          | x        | x         |            |
| 1b    | x   |   |   |   | 3                                    | 1        |          |          |          | x         |            |
| 2a    |   | x   |   |   | 3, 6                                 |          |          | 3        | x        | x         |            |
| 2b    | x   | x   |   |   | 6                                    | 2        |          | 2, 3, 4  |          | x         | x          |
| 2c    | x   | x   |   |   |                                      |          | 2, 5     |          |          |           | x          |
| 3a    | x   | x   |   |   | 2, 3                                 |          |          |          |          | x         |            |
| 3b    |   | x   |   |   | 2, 5                                 |          |          | 4        |          | x         |            |
| 3c    |   | x   |   |   |                                      |          | 2        | 3        |          | x         |            |
| 3d    | x   | x   |   |   |                                      | 2        |          | 3        |          |           | x          |
| 4     |   | x   |   |   |                                      |          | 6        | 3, 4, 5  |          | x         |            |