SACHSEN-ANHALT

Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung (LISA)

ANREGUNGEN ZUR SCHUL- UND UNTERRICHTSENTWICKLUNG 05/2018

VERGLEICHSARBEIT MATHEMATIK
SCHULJAHRGANG 8 – TESTHEFT 1
ERGEBNISSE IM ÜBERBLICK

Schuljahr 2017/2018

Grundschule
Sekundarschule
Gemeinschaftsschule
Gesamtschule
Gymnasium
Fachgymnasium
Förderschule
Berufsbildende Schule

ALLGEMEINES

In Sachsen-Anhalt wurden die unter der Federführung des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) entwickelten Vergleichsarbeiten im Schuljahrgang 8 (VERA-8) im Schuljahr 2017/2018 verbindlich im Fach Mathematik durchgeführt. Das IQB stellte dafür zwei Testhefte mit unterschiedlicher Gesamtschwierigkeit zur Verfügung. An den Gesamtschulen, Förderschulen, Sekundarschulen und Gemeinschaftsschulen des Landes kam das Testheft 1 zum Einsatz. Die Arbeitszeit betrug 90 Minuten (10 Minuten Vorbereitungszeit, 80 Minuten Testzeit). Zugelassene Hilfsmittel waren Zeichengeräte (Zirkel, Geodreieck) und Taschenrechner.
Die Testdurchführung und -auswertung erfolgte durch die jeweils unterrichtende Lehrkraft. Die Rückmeldung der schulbezogen aggregierten Ergebnisse geschah in einem Online-Verfahren. Grundlage für die vorliegenden Übersichten sind die Ergebnisse von 7.328 Schülerinnen und Schülern aus 187 Schulen.

Den in VERA-8 Mathematik vorkommenden Aufgaben liegt das integrierte Kompetenzstufenmodell (Globalmodell, vgl. /2/) im Fach Mathematik zugrunde. Es werden fünf Kompetenzstufen (KS) unterschieden (vgl. Tab. 1).

KS	Standards für den Mittleren Schulabschluss
5	**Optimalstandard:** Kompetenzen, die die Erwartungen der Bildungsstandards übertreffen
4	**Regelstandard plus:** Kompetenzen, die über die grundlegenden Zielsetzungen der Bildungsstandards hinaus gehen
3	**Regelstandard:** durchschnittliche Erwartung an die Kompetenzen
2	**Mindeststandard:** Minimum an Kompetenzen
1	**unter Mindeststandard**

Tab. 1: Kompetenzstufen der Bildungsstandards

ERGEBNISSE IM ÜBERBLICK

Die Aufgabe mit dem höchsten Landesmittelwert des Testheftes 1 repräsentiert erwartungsgemäß die Kompetenzstufe 1 (Aufg. 13.1: AFB I, 92 %). Die Landesmittelwerte zu den im Regelstandard verorteten Aufgaben schwanken zwischen 25 % (Aufg. 23: AFB III) und 45 % (Aufg. 9.1: AFB II). Herauszustellen ist, dass im Mittel 14 % der Schülerschaft eine Anforderung bewältigten, die dem Optimalstandard entspricht (Aufg. 16.4: AFB II).

Ergebnisse zu „Zahlen und Größen“

Sieben der 13 Aufgaben repräsentieren Anforderungen unter Mindeststandard (vgl. Abb. 1). Dabei schwanken die Landesmittelwerte zwischen 56 % (Aufg. 2.2: AFB II und Aufg. 4.2: AFB I) und 82 % (Aufg. 2.1: AFB I). In einer dem Regelstandard plus zugeordneten Aufgabe, in der die Anzahl der Handschläge ermittelt werden sollte, wenn sich 16 Personen einander begrüßen, wird mit 17 % der geringste Landesmittelwert erreicht (Aufg. 3.2: AFB II).
Im Hinblick auf diese Aufgabe sind der Abbildung 1 noch mehr Informationen entnehmbar: Das gefärbte Segment des Perzentilbandes gibt an, dass die Hälfte aller erfassten Schulen Erfüllungsprozentsätze von 12 % bis 22 % haben. Unter dem Segment liegt ein Fünftel der Schülerschaft mit Erfüllungsprozentsätzen von 5 % bis 12 % und oberhalb des Segments ein Fünftel der Schülerschaft mit Erfüllungsprozentsätzen von 22 % bis 34 %. Das Perzentilband verdeutlicht, dass die Schwankung im unteren Bereich kleiner als im oberen Bereich ist. Offenbar ist die Schülerschaft im unteren Bereich vergleichsweise homogen.

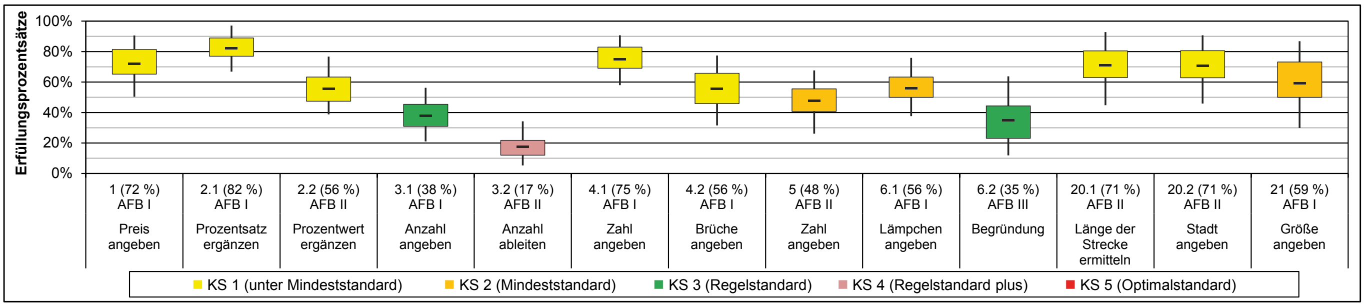

Abb. 1: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Zahlen und Größen" (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

Ergebnisse zu „Daten und Zufall"

In diesem Inhaltsbereich entsprechen vier von zwölf Aufgaben den Anforderungen im Regelstandard bzw. dem Regelstandard plus. Die Landesmittelwerte reichen von 19 % (Aufg. 12.2: KS 4) bis 83 % (Aufg. 7, 8.1 und 10: KS 1).
Exemplarisch werden aufgrund der Befunde die Aufgaben 12.1 bis 12.3 betrachtet. 47 % der Schülerschaft bewältigen die im Mindeststandard verortete Anforderung der Ermittlung der Wahrscheinlichkeit, dass beim Werfen eines Würfels eine gerade Augenzahl nach oben zeigt (Aufg. 12.1: AFB I). Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass die Seitenfläche weiß und die Augenzahl größer als drei ist, wird von 19 % der Schülerschaft richtig ermittelt (Aufg. 12.2). Die im Regelstandard plus zugewiesene Anforderung, eine Erklärung zu widerlegen, bewältigen 45 % der Schülerschaft (Aufg. 12.3: AFB II).
Insbesondere die Perzentilbänder zu den Aufgaben 12.1 und 12.2 sind auffällig. Sie zeigen, dass die Schwankung der Erfüllungsprozentsätze im oberen Bereich sehr groß ist, d. h. die Schülerschaft sehr inhomogen verteilt ist. Worin liegen möglicherweise Ursachen? Gemeinsam ist den Aufgaben, dass das Laplace-Modell als direkt erkennbares Modell zur Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten benötigt wird und damit die Kompetenz des mathematischen Modellierens fokussiert wird. Gegebenenfalls waren einstufige Zufallsversuche zum Zeitpunkt der Testung noch nicht Unterrichtsgegenstand und heuristische Hilfsmittel, Strategien und Prinzipien auf diese Aufgabe nicht anwendungsfähig.
Interessant ist aber auch der Befund, dass die Aufgaben 12.2 und 12.3 den Anforderungsbereich II repräsentieren, obgleich sie unterschiedliche Kompetenzstufen abbilden. Worin liegt der Unterschied? Kompetenzstufen beschreiben konkrete Anforderungen, die Personen bei der Ausprägung einer Kompetenz bewältigen können. Sie beruhen auf empirischen Befunden. Anforderungsbereiche fußen hingegen auf didaktisch-fachlichen Überlegungen, die drei Gruppen von kognitiven Anforderungen beschreiben, die von Lernenden gefordert sein können. Ziel des Mathematikunterrichts muss es sein, zu jedem Inhaltsbereich die drei Anforderungsbereiche für die verschiedenen Kompetenzniveaus ausgewogen zu thematisieren.

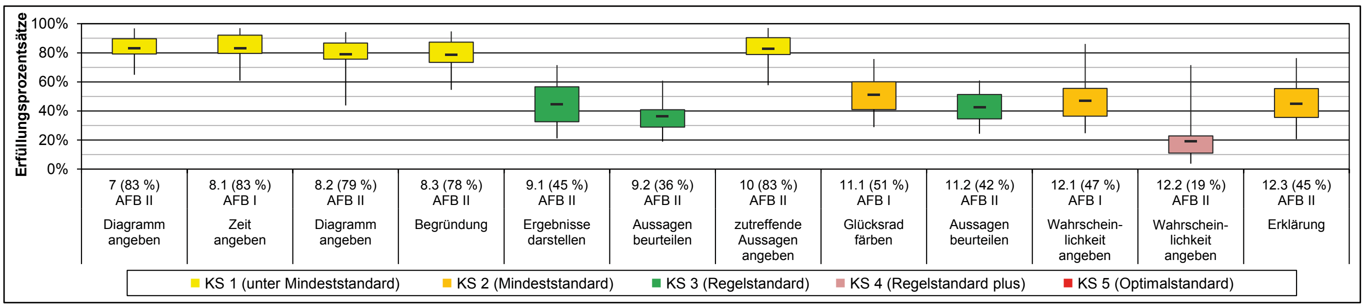

Abb. 2: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Daten und Zufall" (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

Ergebnisse zu „Zuordnungen und Funktionen"

Bei der Angabe der Anzahl der gefahrenen Kilometer wurde der höchste Landesmittelwert von 92 % im diesem Inhaltsbereich in einer in der Kompetenzstufe 1 verorteten Aufgabe erreicht (Aufg. 13.1). Auffällig ist, dass die jeweiligen Erfüllungsprozentsätze der Aufgaben, die Anforderungen unter Mindeststandard repräsentieren, im Vergleich zu den anderen Inhaltsbereichen stärker streuen. 62 % der Schülerschaft konnten zu einer schriftsprachlich formulierten Rechnung eine innermathematische Darstellung auswählen (Aufg. 15.1). Eine große Streuung der Erfüllungsprozentsätze im unteren Bereich ist bei der Angabe der nach einem bestimmten Zeitraum aus einem Behälter abgepumpten Wassermenge zu erkennen (Aufg. 16.1: AFB I). Dies weist auf eine große Inhomogenität der Schülerschaft in diesem Bereich hin.
Die im Regelstandard zugewiesene Anforderung, die durchschnittliche Geschwindigkeit in einem vorgegebenen Zeitraum zu ermitteln, wird von 34 % der Schülerschaft bewältigt (Aufg. 13.4: AFB II).
Ferner müssen die Schülerinnen und Schüler in diesem Inhaltsbereich die einzige im Optimalstandard eingeordnete Aufgabe lösen, denjenigen Zeitpunkt zu ermitteln, in dem zwei Behälter die gleiche Wassermenge enthalten. Das Perzentilband zeigt diesmal aber auch, dass es bei dieser Aufgabe eine nicht unerhebliche Streuung im oberen Bereich gibt.

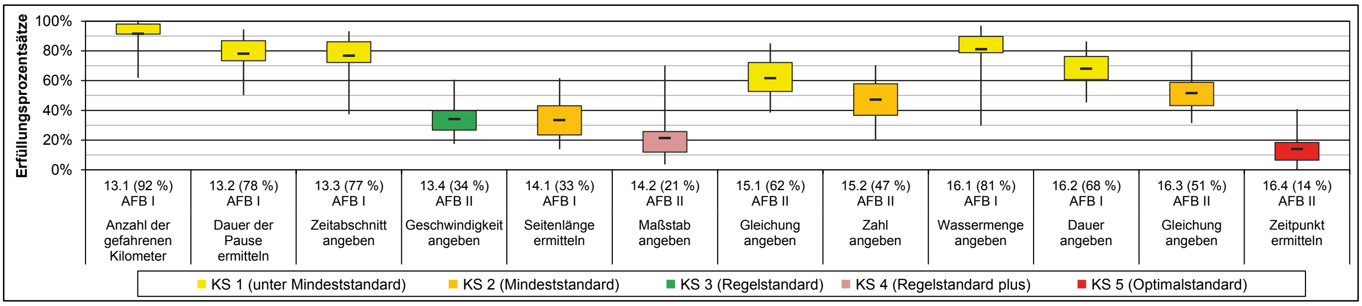

Abb. 3: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Zuordnungen und Funktionen“ (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

Ergebnisse zu „Raum und Form“

In diesem Inhaltsbereich entsprechen vier von acht Aufgaben den Anforderungen im Mindeststandard bzw. bleiben unter Mindeststandard. 24 % der Schülerschaft konnten den Regelstandard plus erfüllen und vom gegebenen Umfang auf den Flächeninhalt schließen (Aufg. 22.2: AFB II). Im Unterschied zur Anforderung im Optimalstandard, vom Umfang eines Rechtecks auf mögliche Seitenlängen dieses Rechtecks zu schließen (Aufg. 22.1: AFB II), ist in der Aufgabe 22.2 ein mehrschrittiges Vorgehen erforderlich, das die Anwendung einer selbstentwickelten Strategie voraussetzt. Ein vergleichsweise niedriger Landesmittelwert ist bei einer Aufgabe im Mindeststandard zu finden, bei der eine Figur so zu ergänzen war, dass eine gegebene Gerade Symmetrieachse wird (Aufg. 18.2: AFB I).

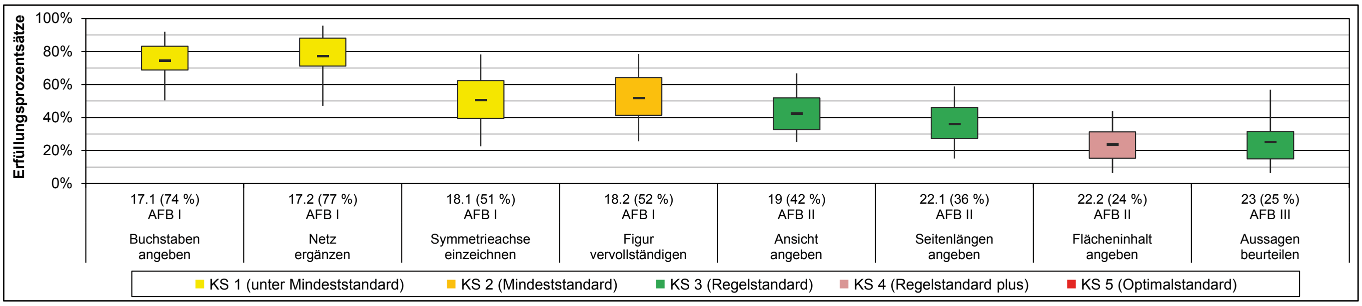

Abb. 4: Ergebnisse im Inhaltsbereich „Raum und Form“ (90 %-Perzentilbänder und Landesmittelwerte)

HINWEISE ZUR WEITERARBEIT

Ein erster Schritt bei der Analyse der klassen- bzw. schulbezogenen Ergebnisse ist die Verortung dieser in die Landesergebnisse unter Zuhilfenahme der Perzentilbänder. Damit ist ein kriterialer Vergleich von Landes-, Schul- und Klassenergebnissen mit den Erwartungen der Bildungsstandards möglich. Für VERA-8 Mathematik bilden die Anforderungen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss das Vergleichskriterium. Denn diese legen Kompetenzen fest, die von Schülerinnen und Schülern bis zu einem bestimmten Zeitpunkt ihrer Bildungsbiografie erworben werden sollen.

In einem zweiten Schritt können die bereits angedeuteten Befunde auf Landesebene Ausgangspunkte für weitergehende Untersuchungen sein. Im Folgenden werden am Beispiel bereits betrachteter Aufgaben didaktische Anregungen für die Unterrichtsarbeit abgeleitet.

Vom Abzählen hin zu kombinatorischen Formeln

Die Aufgabe 3 zeigt eine Möglichkeit vom Übergang des Auflistens und Abzählens hin zur Nutzung von kombinatorischen Formeln auf. In Vorbereitung der Bewältigung der Anforderung in der Aufgabe 3.2 kann die Aufgabe 3.1 variiert werden, in dem zunächst die unterschiedlichen Anzahlen von Personen mit der Frage nach der Anzahl der Handschläge verbunden wird. Schnell kommen die Schülerinnen und Schüler zur Erkenntnis, dass es bei einer kleinen Personenanzahl noch recht gut gelingt, durch Abzählen die Anzahl der Handschläge zu ermitteln. Das Vorgehen wird jedoch umso umständlicher, je mehr Personen vorhanden sind. Dies kann Ausgangspunkt für die Einführung einer kombinatorischen Zählstrategie sein. Bei systematischer Darstellung der Ergebnisse kommen die Lernenden möglicherweise zur Erkenntnis, dass bei jeder weiteren Person so viele neue Handschläge hinzukommen, wie es Personen gegeben hat, bevor die neue Person hinzukam. Dies stellt eine rekursive Bildungsvorschrift dar, wie sie in Aufgabe 3.2 bereits implizit verwendet wird. Die rekursive Bestimmung kann für eine sehr große Personenanzahl zum Beispiel mithilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes umgesetzt werden. Ausgehend vom Problem, dass auch die rekursive Bestimmung bei sehr großer Personenanzahl Nachteile hat, kann die Verwendung kombinatorischer Formeln motiviert werden.

Modellieren im Mathematikunterricht

In der Aufgabe 12.3 soll die mathematische Argumentation einer Person bewertet, d. h. ein fehlerhaftes Modell überprüft werden. Im Hinblick auf den Modellierungskreislauf geht es hier um das Validieren als Teilprozess des Modellierens. Gemeint ist damit die Infragestellung der Lösung und ggf. erneute Durchführung einer gesamten Modellierung. Dazu zählen folgende Gesichtspunkte /3/:

- gefundene Lösung kritisch überprüfen und reflektieren,

- Teile des Modells revidieren bzw. den Modellierungsprozess erneut durchführen, falls Lösungen der Situation nicht angemessen sind,
- überlegen, ob andere Lösungswege möglich sind bzw. Lösungen anders entwickelt werden können,
- ein Modell grundsätzlich infrage gestellt wird.

Diese und weitere Aspekte des Modellierens können im Mathematikunterricht durch entsprechend zugeschnittene Aufgaben geübt werden.

Distraktoren zur Aufdeckung von Fehlkonzepten nutzen

Die Ankreuzmöglichkeiten in der Aufgabe 13.4, die neben der richtigen Antwort angekreuzt werden können, geben Aufschluss über etwaige Fehlkonzepte, auf die einzelne Schülerinnen und Schüler zurückgreifen könnten. Der erste Distraktor könnte fälschlicherweise angekreuzt werden, wenn lediglich die Strecke betrachtet wird, die im betreffenden Intervall zurückgelegt worden ist. Bei der vierten Antwortmöglichkeit verhält es sich genau umgekehrt. Hier wird vermutlich die Zeitspanne des Intervalls fälschlicherweise als die gesuchte Geschwindigkeit interpretiert.

Begriffe der Geometrie anschaulich fassbar machen

Die Aufgabe 18 kann leicht zu einem Erkundungsauftrag unter Verwendung von realistischem Material ausgeweitet werden. So können Schülerinnen und Schüler zum Beispiel in einer Hausaufgabe dazu aufgefordert werden, eigene Erkundungen zu Verkehrsschildern oder Gebäuden und deren Symmetrieeigenschaften anzustellen. Mit einer Digitalkamera (z. B. in einem Smartphone) können geometrische Formen leicht festgehalten werden. Begriffe aus der Geometrie wie Achsen- und Punktsymmetrie bieten die Möglichkeit, sie handlungsgeleitet anschaulich fassbar zu machen. Das heißt, die Operation „Achsenspiegelung“ lässt sich in konkreten Handlungen umsetzen und in ihren Eigenschaften direkt an Beispielen untersuchen. Hier kann die ikonische Darstellung in Form von Zeichnungen oder die symbolische Darstellung, zum Beispiel in Form von Termen, mit der enaktiven Darstellung verbunden werden.

Diagnostisch wirksam werden

Durch die besondere Form der Auswertung der Aufgaben werden Zwischenschritte oder Teillösungen nicht gewertet. Demnach kann im Vergleich zu einem differenzierten Bewertungsschema anhand der Erfüllungsprozentsätze oder Perzentilbänder nicht eruiert werden, welche Auffälligkeiten es hinsichtlich der aufgetretenen Fehler gibt. Im Zusammenhang mit Lösungen von Lernenden ist es sinnvoll, differenziert Stärken und Schwächen der Schülerschaft in Bezug auf einzelne Inhalte zu untersuchen. Die folgenden Ausführungen illustrieren dies am Beispiel der Aufgabe 16.4.

$$5x - 400 = 10x - 600 \quad | +5x$$
$$-400 = 15x - 600 \quad | +600$$
$$200 = 15x \quad | :15$$
$$13{,}3\overline{3} = x$$

Abb. 5: Schülerlösung

Die Schülerlösung (vgl. Abb. 5) dokumentiert einen Lösungsweg über eine Gleichung und wurde mit „falsch“ bewertet, da die Ermittlung des Zeitpunktes fehlerbehaftet ist. Welche Kompetenzen können daraus geschlussfolgert werden? Die Schülerlösung deutet darauf hin, dass die Kompetenz der Informationsentnahme hinreichend ausgeprägt ist. Reserven gibt es bei der Informationsverarbeitung, da die angegebenen Modelle $y = 5x - 400$ für den ersten Behälter und $y = 10x - 600$ für den zweiten Behälter im Sachzusammenhang nicht sinnvoll sind, obgleich sie auch zum richtigen Ergebnis führen. Nach der Transformation in eine symbolsprachliche Darstellung wird nicht beachtet, dass nun Wasser in den Tank laufen würde, d. h. eine richtige Gleichung ist $400 - x = 600 - 10x$. Überprüft werden kann die Ausprägung der Kompetenz durch Aufgaben, in denen

- mathematischen Modellen Anwendungssituationen zugeordnet oder
- fachsprachliche und umgangssprachliche Formulierungen sachgerecht in mathematische Ausdrücke übersetzt und mathematische Ausdrücke verbalisiert

werden. Reserven gibt es bei der Schülerlösung ebenso beim Lösen eines mathematischen Problems, da zum einen das ausgewählte Lösungsverfahren fehlerbehaftet ist und zum anderen das erhaltene Ergebnis nicht kontrolliert wird. Unabhängig vom hier dargelegten Lösungsweg sollten weitere Wege im Mathematikunterricht thematisiert werden, wie zum Beispiel zeichnerische Lösungen. Denkbar ist ebenso, Schülerlösungen zum Gegenstand des Unterrichts zu machen, um über unterschiedliche Wege zu reflektieren.

Fortbildungsangebote zur Unterstützung nutzen

Zur Unterstützung der Weiterarbeit der schulischen Fachschaften werden im Schuljahr 2018/2019 Fortbildungen zur Kompetenzorientierung und Aufgabenkultur im Fach Mathematik angeboten. Sie sind über den Fortbildungskatalog auf dem Landesbildungsserver zu finden. Entsprechende Bedarfe ergeben sich aus der Analyse der klassen- bzw. schulbezogenen Ergebnisse. Im schulischen Fortbildungsplan werden dann die mittelfristig geplanten Fortbildungsschwerpunkte festgelegt.

Quellen:

/1/ Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2003): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Beschluss vom 4.12.2003. Berlin.

/2/ Institut für Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (Hrsg.) (2012): Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und den Mittleren Schulabschluss im Fach Mathematik. Stand: 15. Februar 2012. Berlin.

/3/ Kaiser, G. et al. (2015). Anwendungen und Modellieren. In Bruder, R. et al. (2015), Handbuch der Mathematikdidaktik.

Impressum

Herausgeber: Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (LISA)

Autor: Thomas Viehweg

Alle bisher erschienenen Informationsblätter finden Sie auch auf dem Bildungsserver Sachsen-Anhalt unter: www.bildung-lsa.de/lisa-kurz-texte