

Auswertung der schriftlichen Abschlussprüfung
im Fach Mathematik
Schuljahrgang 10, Schuljahr 2014/2015



SACHSEN-ANHALT

Landesinstitut für Schulqualität
und Lehrerbildung (LISA)

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1	Anlage der schriftlichen Abschlussprüfung 3
2	Darstellung der Ergebnisse im Überblick..... 4
2.1	Notenbezogene Ergebnisse im Überblick 4
2.2	Aufgabenbezogene Ergebnisse im Überblick 5
3	Aufgabenbezogene Ergebnisse – Verteilungen..... 9
4	Hinweise zur Weiterarbeit..... 10

1 Anlage der schriftlichen Abschlussprüfung

Die schriftliche Abschlussprüfung im Fach Mathematik ist Bestandteil der Prüfungen am Ende des Schuljahrgangs 10 zur Erlangung des Realschulabschlusses einschließlich des erweiterten Realschulabschlusses.

Grundsätzlich gilt, dass die Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler sich zum einen aus den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Beschluss der KMK vom 4.12.2003) und zum anderen aus dem geltenden Lehrplan für die Sekundarschulen in Sachsen-Anhalt ergeben.

Die Prüfungsarbeit bildet die zu erreichenden allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen repräsentativ durch die Prüfungsaufgaben ab und ist komplex angelegt. Die Anforderungsbereiche I, II und III sind berücksichtigt und insgesamt annähernd im Verhältnis von

$$\text{BE(AFB I)} : \text{BE(AFB II)} : \text{BE(AFB III)} = 30 : 50 : 20 \text{ realisiert.}$$

In der Prüfungsarbeit sind die im Mathematikunterricht üblichen Aufgabenarten gestellt. Es sind also i. d. R. Bestimmungsaufgaben (insbesondere inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben), Begründungsaufgaben und Konstruktionsaufgaben, aber auch offene Aufgaben.

Die Prüfungsarbeit besteht aus Pflichtteil 1, Pflichtteil 2 und dem Wahlpflichtteil. Im Pflichtteil 1 (hilfsmittelfreier Teil) bearbeiten die Schülerinnen und Schüler Aufgaben, die sicheres basales Wissen und Können repräsentativ abprüfen, ohne Taschenrechner und ohne Formelsammlung. Hier erfolgt die Bewertung zunächst mithilfe von Feinpunkten, um die Verhältnismäßigkeit zu wahren. Insgesamt können mit dem Pflichtteil 1 acht Bewertungseinheiten (BE) erreicht werden. Im Pflichtteil 2 sowie in den Wahlpflichtaufgaben sind Taschenrechner und Formelsammlung als Hilfsmittel zugelassen. Die Aufgaben im Pflichtteil 2 haben insgesamt einen Umfang von 24 Bewertungseinheiten. Im Wahlpflichtteil wählen die Schülerinnen und Schüler eine von drei Wahlpflichtaufgaben aus. Welche Wahlpflichtaufgabe bewertet werden soll, wird von den Schülerinnen und Schülern auf dem Deckblatt durch Ankreuzen verbindlich dokumentiert. Die Wahlpflichtaufgaben haben je einen Umfang von acht Bewertungseinheiten.

Die Erfassung der Ergebnisse der Prüfungsarbeit erfolgte für alle Schulen in einem Online-Verfahren. Grundlage für die vorliegende Ergebnisübersicht sind die schulbezogen erfassten Ergebnisse von insgesamt 7512 an der Prüfung teilgenommenen Schülerinnen und Schülern aus 181 Schulen (vor allem Sekundarschulen, Gesamtschulen und weitere zum Realschulabschluss führende Schulen).

2 Darstellung der Ergebnisse im Überblick

2.1 Notenbezogene Ergebnisse im Überblick

Jahresnote Schuljahrgang 10	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
Prozent	4,1	26,9	37,0	27,5	4,3	0,2

Tabelle 1: Überblick Jahresnoten Mathematik

Prüfungsnote RSA 10	Note 1	Note 2	Note 3	Note 4	Note 5	Note 6
Prozent	2,5	15,5	22,5	33,2	22,0	4,3

Tabelle 2: Überblick Prüfungsnoten Mathematik

Bei den Jahresnoten Mathematik im Schuljahrgang 10 wurde ein Landesmittelwert von 3,02 erreicht. Der Landesmittelwert für die Noten der schriftlichen Realschulabschlussprüfung Mathematik beträgt 3,70.

Die Verteilungen der Durchschnitte der erfassten Schulen ist in der Abbildung 1 dargestellt.

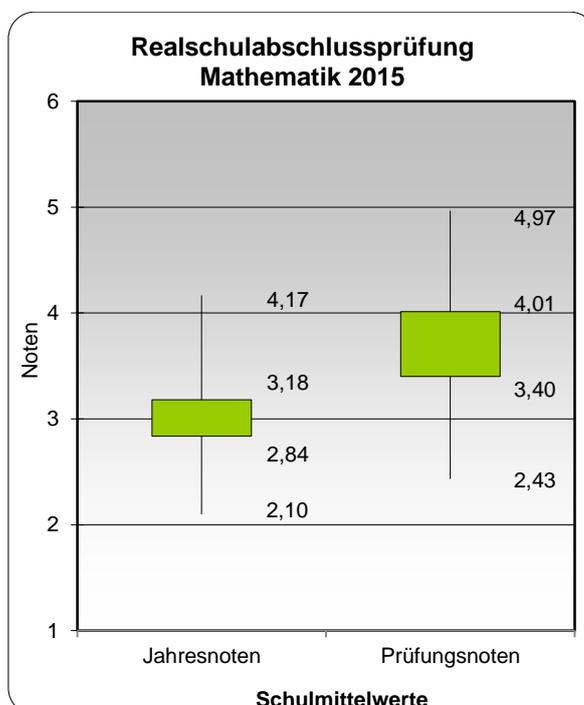


Abbildung 1: Perzentilbänder (100 %-Bänder) der Jahres- und Prüfungsnoten im Fach Mathematik

2.2 Aufgabenbezogene Ergebnisse im Überblick

Pflichtteil 1: Hilfsmittelfreie Basiskompetenzen

Aufgabe	1a	1b	1c	1d	2	3	4	
Kurzbezeichnung der Kompetenz	Produkt berechnen	Summe aus natürlicher Zahl und Quotienten berechnen	Differenz berechnen	Prozentwert berechnen	Zeitan-gabe umrechnen	Produkt in Summe umwandeln	relative Häufigkeit berechnen	relative Häufigkeit in Prozent angeben
Erfüllungsprozensatz	88 %	67 %	66 %	75 %	87 %	51 %	70 %	56 %

Aufgabe	5		6	7	8	9	10a	10b
Kurzbezeichnung der Kompetenz	Gleichung angeben	Länge einer Seite ermitteln	Drehzahl angeben	Formel umstellen	Länge einer Strecke ermitteln	Eigen-schaft eines Parallelo-gramms angeben	Anzahlen ver-gleichen	Anzahl im Diagramm veranschaulichen
Erfüllungsprozensatz	50 %	37 %	39 %	48 %	60 %	58 %	83 %	84 %

Tabelle 3: Erfüllungsprozensätze (Landesmittelwerte) Pflichtteil 1

Aufgabe	Kurzbezeichnung Kompetenzen	Bewertungseinheiten und Anforderungsbereiche			Erfüllungsprozensätze
		I	II	III	
Pflichtteil 2					
1a	Guthaben berechnen	2	1		72 %
1b	Netz eines Kreiszyinders zeichnen	1	2		28 %/59 %
1c	Wahrscheinlichkeit ermitteln		1		52 %
1d	genormte Größenvorsätze anwenden		1		58 %
1e	Zeitungsaussage beurteilen			1	78 %
2a	lineare Funktionen grafisch darstellen	2			70 %/74 %
2b	Gleichung einer linearen Funktion mittels Eigenschaften begründen		2		38 %
2c	Lösungsverfahren situationsgerecht anwenden	1	2		38 %
2d	automatische Anpassung der Zellbezüge erklären		1		40 %
3a-1	Streckenlänge im Dreieck berechnen		2		55 %
3a-2	Dreieck maßstäblich konstruieren und Streckenlänge im Gelände ermitteln		3		49 %
3b	Entfernung mithilfe von Winkeln berechnen			2	28 %

Tabelle 4: Erfüllungsprozensätze (Landesmittelwerte) Pflichtteil 2



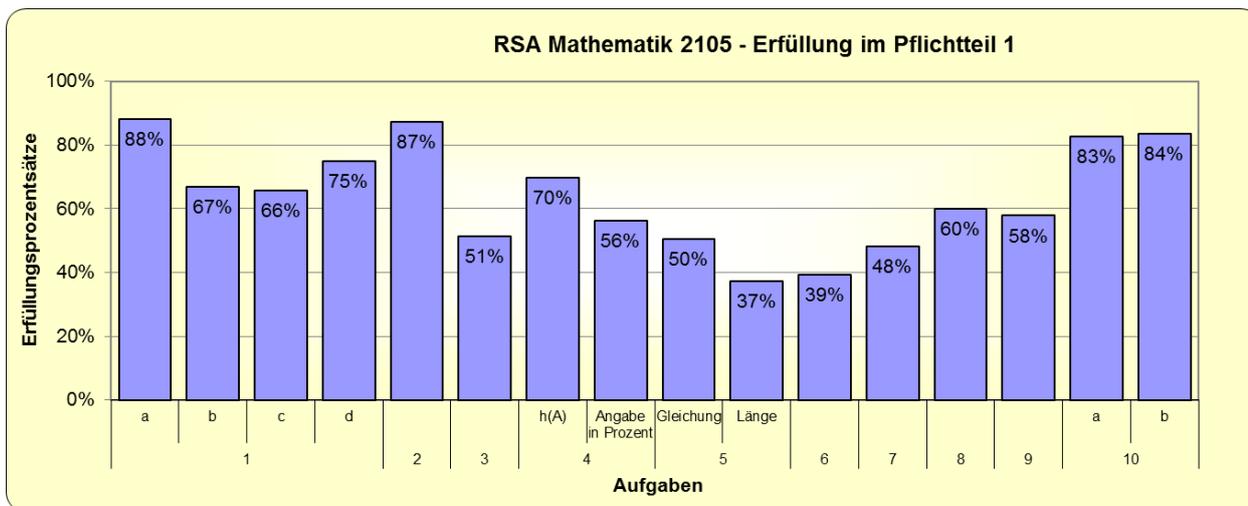


Abbildung 2: Erfüllungsprozentsätze (Landesmittelwerte) Pflichtteil 1 (Hilfsmittelfreie Basiskompetenzen)

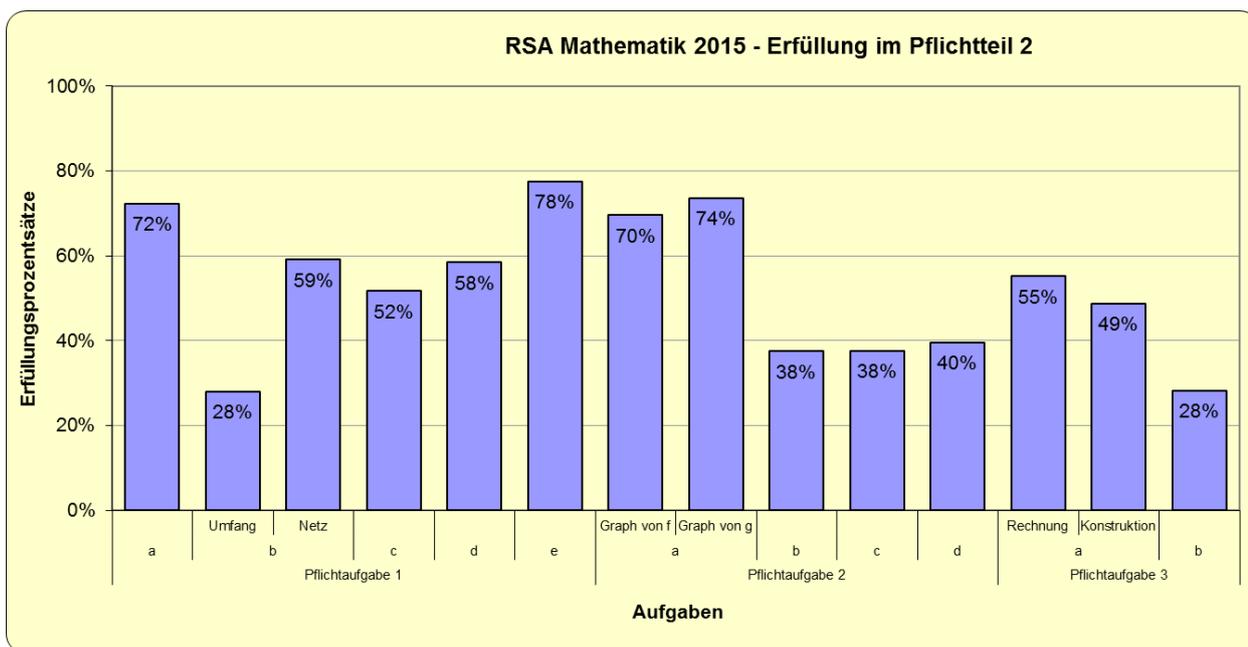


Abbildung 3: Erfüllungsprozentsätze (Landesmittelwerte) Pflichtteil 2

Aufgabe	Kurzbezeichnung Kompetenzen	Bewertungseinheiten und Anforderungsbereiche			Erfüllungs- prozentsätze
		I	II	III	
Wahlpflichtteil					
WPA 1a	Prozentsatz in Sachsituationen berechnen		2		87 %
WPA 1b	Kupfermasse für Schmelze mit vorgegebenem Mischungsverhältnis ermitteln		2		29 %
WPA 1c	Volumina berechnen			2	17 %
WPA 1c	fehlerhaften Ansatz rechnerisch nachweisen			2	8 %
WPA 2a-1	Graphen einer quadratischen Funktion zeichnen		2		59 %
WPA 2a-2	Funktionswert bei gegebenem Argument berechnen		1		33 %
WPA 2b	Eigenschaften quadratischer Funktionen sachverhaltsbezogen anwenden		1	2	20 %/19 %
WPA 2c	Parameter in einer Funktionsgleichung zur Beschreibung eines Sachverhalts ermitteln			2	16 %
WPA 3a	Aussage unter Verwendung von Dreieckseigenschaften begründen			2	60 %
WPA 3b	Flächeninhalt eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks bei gegebener Hypotenuse berechnen		4		45 %
WPA 3c	vorgegebene Volumenformel für dreiseitige Pyramide in besonderer Lage erklären			2	5 %

Tabelle 5: Erfüllungsprozentsätze (Landesmittelwerte) Wahlpflichtteil

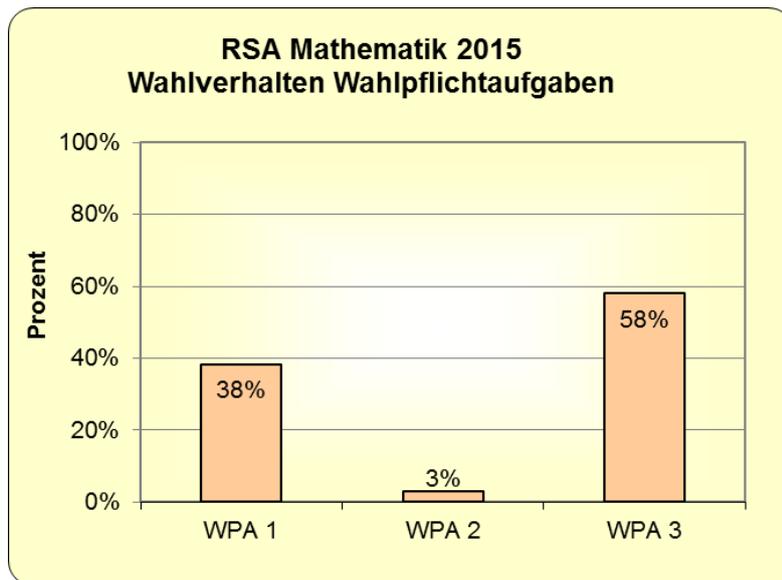


Abbildung 4: Wahlverhalten bei den Wahlpflichtaufgaben

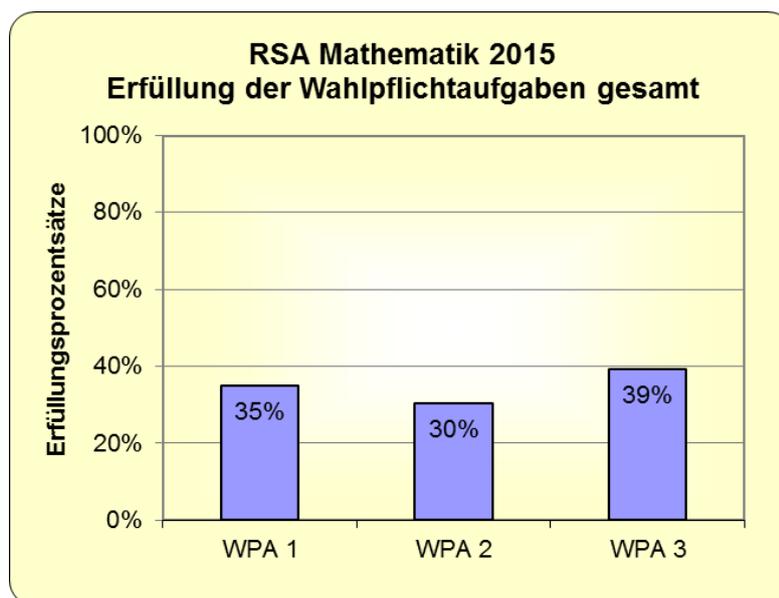


Abbildung 5: Erfüllungsprozentsätze (Landesmittelwerte) Wahlpflichtaufgaben

3 Aufgabenbezogene Ergebnisse – Verteilungen

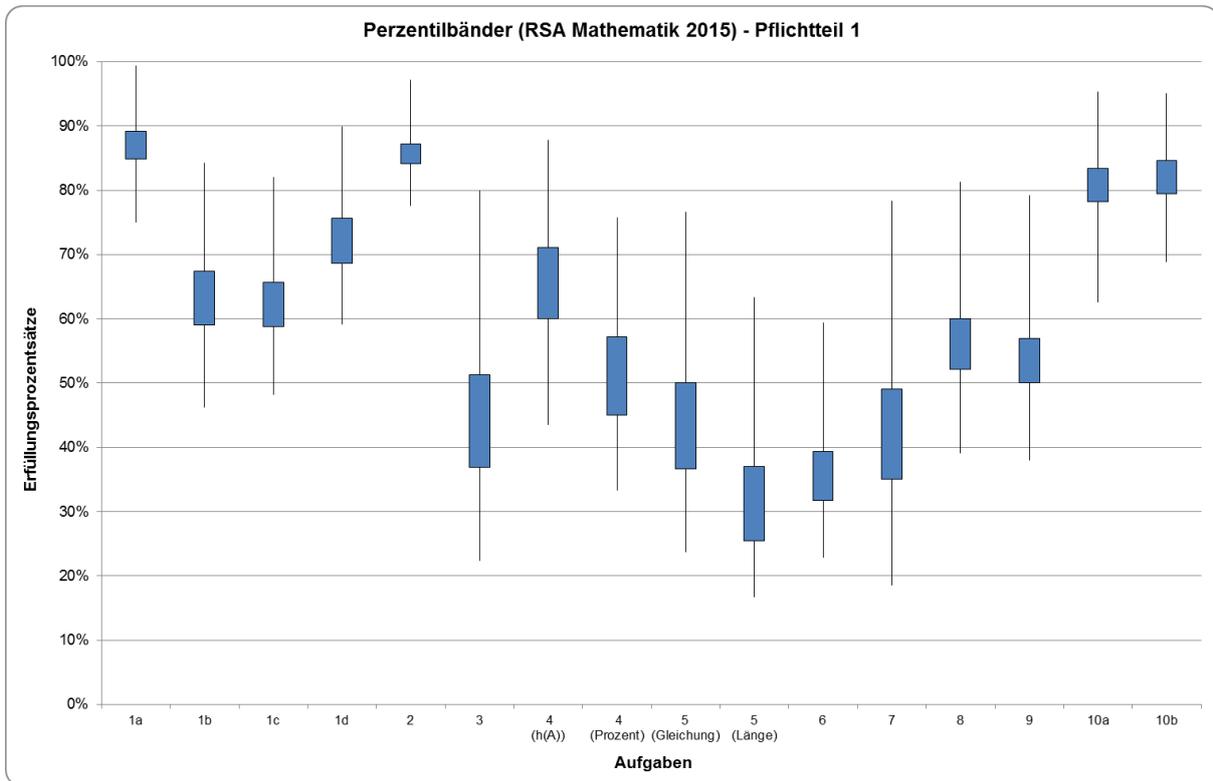


Abbildung 6: Perzentilbänder (90 %-Bänder) Pflichtteil 1

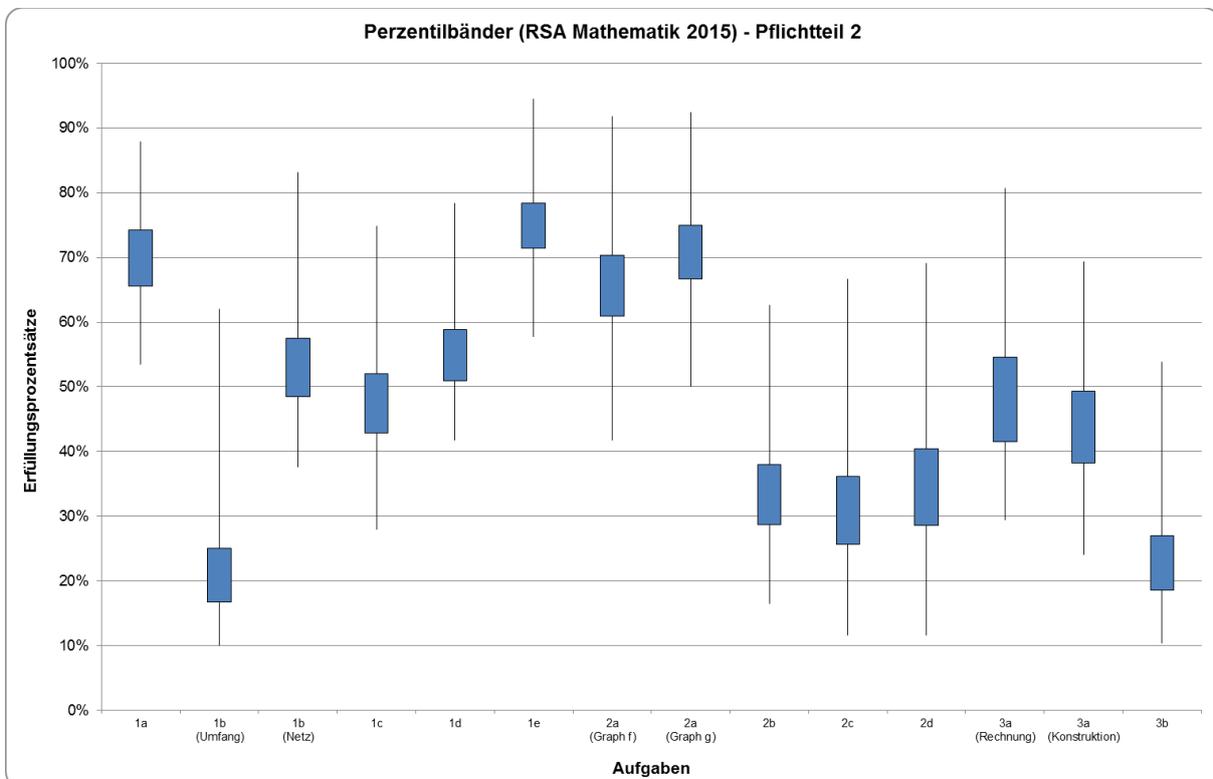


Abbildung 7: Perzentilbänder (90 %-Bänder) Pflichtteil 2

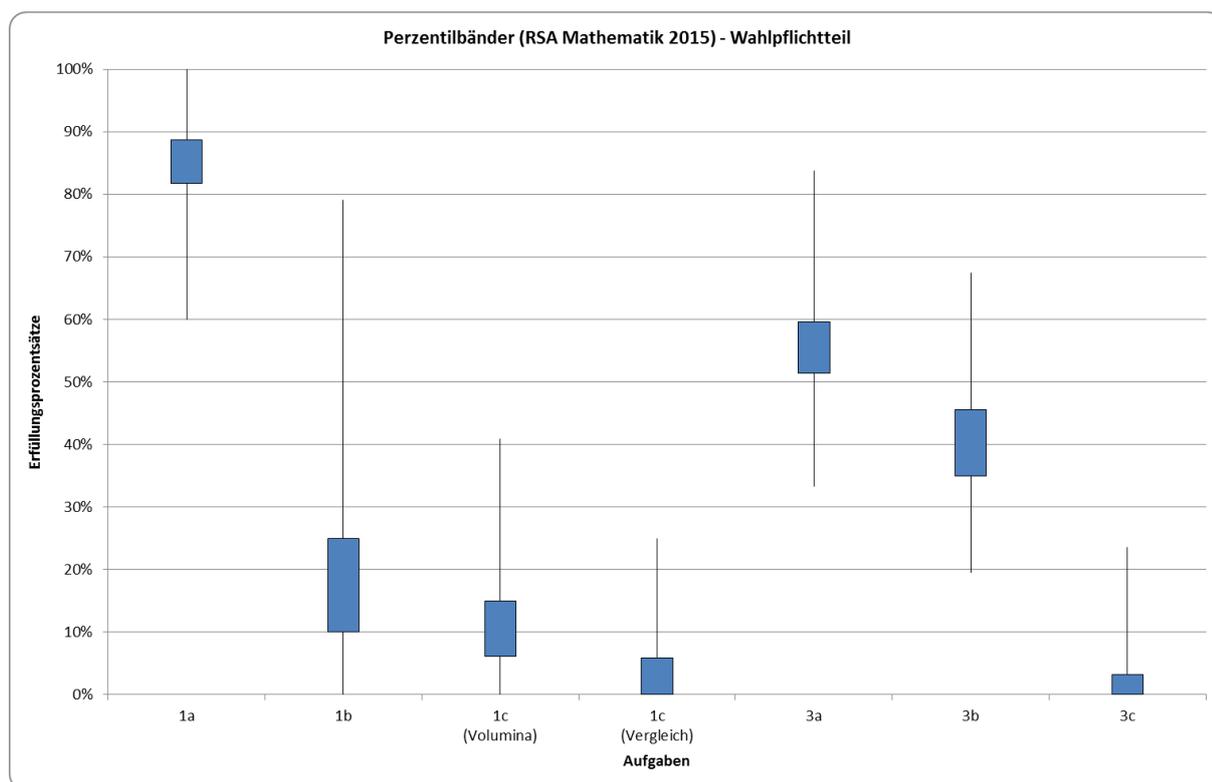


Abbildung 8: Perzentilbänder (90 %-Bänder) Wahlpflichtteil

Aufgrund der geringen Anwahl der Wahlpflichtaufgabe 2 wird auf eine Auswertung der Ergebnisse mittels Perzentilbändern verzichtet.

4 Hinweise zur Weiterarbeit

Die in den vorherigen Abschnitten dargestellten landesweit erreichten Ergebnisse der schriftlichen Abschlussprüfung im Fach Mathematik bieten zunächst die Möglichkeit, die schulischen Ergebnisse zu vergleichen und einzuordnen. Diese Verortung könnte in einer Beratung in der schulischen Fachschaft vorgenommen werden.

Die vergleichenden Betrachtungen sollten dabei ein Ausgangspunkt zur Reflexion von Unterrichtsarbeit sein. Eine Analyse der Ergebnisse mit Blick auf die Weiterentwicklung der unterrichtlichen Schwerpunktsetzung mit dem Ziel der weiteren Verbesserung der Unterrichtsqualität sollte sich anschließen.

Am Beispiel der Wahlpflichtaufgabe 1b soll im Folgenden gezeigt werden, wie eine Analyse einer Aufgabe erfolgen und zur Weiterentwicklung der unterrichtlichen Arbeit beitragen könnte.

Wahlpflichtaufgabe 1b

Messing ist eine Legierung, die aus Kupfer und Zink besteht.
 Für eine Messingschmelze werden zunächst 15 kg Zink und 35 kg Kupfer bereitgestellt.

- b) Der Kupferanteil dieser Messingschmelze soll auf 75 % erhöht werden.
 Ermitteln Sie, wie viel Kilogramm Kupfer hinzugefügt werden müssen.

Einordnung der Aufgabe in das Kompetenzmodell

Kurzbezeichnung Kompetenz:
 Kupfermasse für Schmelze mit vorgegeben Mischungsverhältnis ermitteln

inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
				P	M	A	D	I	II	III
x				1, 3					x	

Nach dem Einordnen der Aufgabe in das Kompetenzmodell kann man die erreichten Ergebnisse wie folgt analysieren.

Feststellungen:

Der Landesmittelwert der Erfüllungsprozentsätze beträgt 29 %.

Das zur Wahlpflichtaufgabe 1b gehörende Perzentilband zeigt die landesweite Verteilung der Erfüllungsprozentsätze.

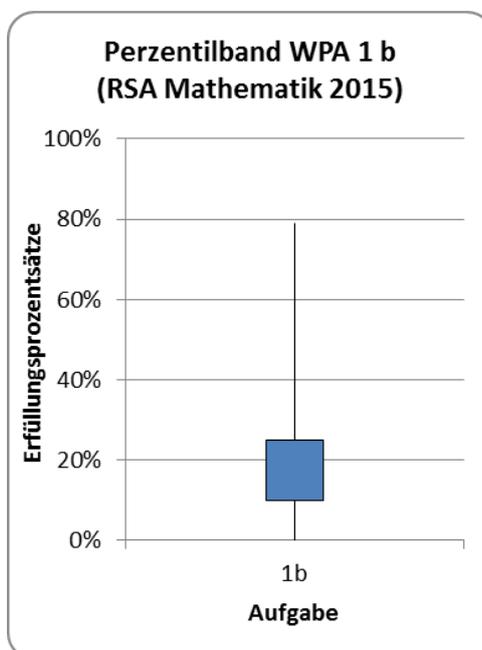


Abbildung 10: Perzentilband (90 %-Band) Wahlpflichtaufgabe 1b

Dem Perzentilband kann man folgende Informationen entnehmen:

- Die Hälfte aller erfassten Schulen haben Erfüllungsprozentsätze von 11 % bis 25 % erreicht.
- 20 % aller erfassten Schulen haben Erfüllungsprozentsätze von 0 % bis 11 % erreicht.
- Weitere 20 % der Schulen haben Erfüllungsprozentsätze von 25 % bis 79 % erreicht.
- Die Leistungsdifferenz zwischen den erreichten Ergebnissen ist landesweit sehr groß (von 0 % bis 79 %).

Die niedrigen durchschnittlichen landesweiten Erfüllungsprozentsätze geben Anlass, die Aufgabe einer tiefergehenden fachlichen Analyse zu unterziehen, um Schlussfolgerungen für die unterrichtliche Arbeit abzuleiten.

Eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe verlangt ein inhaltliches Erschließen des Aufgabentextes. Die Schülerinnen und Schüler müssen aufgabenrelevante Informationen entnehmen (P1)¹, geeignete Lösungsverfahren auswählen und diese unter den Aufgabenbedingungen anwenden (P3).

Die folgende Schülerlösung zeigt eine erfolgreiche Bearbeitung der Wahlpflichtaufgabe 1b.

Schülerlösung

Handwritten student solution on grid paper:

$$\frac{15 \text{ kg Zink}}{25\%} = \frac{x \text{ Kupfer}}{75\%} \quad x = \frac{15 \cdot 75}{25} = \underline{45 \text{ kg}}$$

Kontrolle: $\frac{45}{60} \cdot 100\% = 75\%$

Es müssen 40 kg Kupfer hinzugefügt werden.

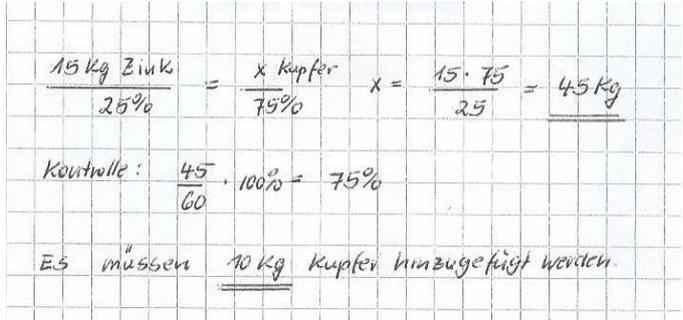
Kommentar

Die außermathematische Anwendungsaufgabe wird hier mithilfe einer Verhältnisgleichung gelöst. Dabei werden alle aufgabenrelevanten Informationen in geeigneter Weise zueinander in Bezug gesetzt. Lobenswert ist hier auch die Kontrolle des Ergebnisses bevor der Antwortsatz formuliert wird.

Aufgabenstellung und Schülerlösung lassen sich für die weitere Unterrichtsarbeit verwenden, z. B. bei der Weiterentwicklung der allgemeinen mathematischen Kompetenz „mathematisch argumentieren und kommunizieren“. Ein möglicher Auftrag für Schülerinnen und Schüler im Unterricht könnte wie folgt lauten:

¹ siehe Einordnung ins Kompetenzmodell

Auftrag: Beschreibe und begründe den dargestellten Lösungsweg.

Aufgabe	Lösung
<p>Messing ist eine Legierung, die aus Kupfer und Zink besteht. Für einen Messingschmelze werden zunächst 15 kg Zink und 35 kg Kupfer bereitgestellt. Der Kupferanteil dieser Messingschmelze soll auf 75 % erhöht werden. Ermitteln Sie, wie viel Kilogramm Kupfer hinzugefügt werden müssen.</p>	 <p> $\frac{15 \text{ kg Zink}}{25\%} = \frac{x \text{ Kupfer}}{75\%} \quad x = \frac{15 \cdot 75}{25} = \underline{45 \text{ kg}}$ </p> <p> Kontrolle: $\frac{45}{60} \cdot 100\% = 75\%$ </p> <p> Es müssen <u>45 kg</u> Kupfer hinzugefügt werden. </p>

In der erwarteten Beschreibung können die aufgabenrelevanten Informationen in der Lösungsdarstellung gekennzeichnet und herausgearbeitet werden. Die Begründung schließt sich an, wobei der Ansatz über eine Verhältnisgleichung im Mittelpunkt der Argumentation stehen wird.

Weitere Ideen für die Unterrichtsarbeit lassen sich auch aus fehlerhaften Schülerlösungen ableiten. Nachfolgend wird eine häufig beobachtete fehlerhafte Schülerlösung betrachtet.

Fehlerhafte Schülerlösung:

Es müssen 2,5 kg Kupfer hinzugefügt werden.

$$\frac{35 \text{ kg} + x}{50 \text{ kg}} = 0,75 \rightarrow x = 2,5 \text{ kg.}$$

Rein rechnerisch ist die Bruchgleichung korrekt gelöst (37,5 kg von 50 kg sind 75 %). Der Fehler liegt hier im Lösungsansatz.

Für die Weiterarbeit im Unterricht ist diese fehlerhafte Schülerlösung sehr wertvoll, da viele Facetten beim Problemlösen thematisiert werden können.

In einem ersten Schritt kann gezeigt werden, dass bei diesem Ansatz die Analyse des Aufgabentextes nicht vollständig erfolgte, z. B. mit folgendem Auftrag:



Auftrag:

Ermittle, welche Information im Aufgabentext bei der Lösung nicht berücksichtigt wurde.

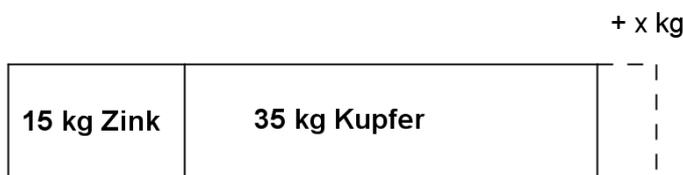
Aufgabe	fehlerhafte Lösung
Messing ist eine Legierung, die aus Kupfer und Zink besteht. Für eine Messingschmelze werden zunächst 15 kg Zink und 35 kg Kupfer bereitgestellt. Der Kupferanteil dieser Messingschmelze soll auf 75 % erhöht werden. Ermitteln Sie, wie viel Kilogramm Kupfer hinzugefügt werden müssen.	$\frac{35 + x}{50} = 0,75$ 2,5 kg Kupfer müssen hinzugefügt werden. Kontrolle: 37,5 von 50 sind 75 %

Die Schülerinnen und Schüler sollten erkennen, dass die im Aufgabentext gegebenen 15 kg Zink in dieser Lösung keine Berücksichtigung gefunden haben.

Welche Möglichkeiten haben die Schülerinnen und Schüler, einen fehlerhaften Ansatz zu erkennen? Grundsätzlich sollten die Schülerinnen und Schüler zu einem reflektierten Umgang mit Ergebnissen befähigt werden. Im Folgenden werden exemplarisch Vorgehensweisen vorgestellt, die den reflektierten Umgang mit Ergebnissen unterstützen.

Analyse der Aufgabenstellung

Schwerpunkt der unterrichtlichen Arbeit könnte die Arbeit am Text sein. Die in der Aufgabenstellung enthaltenen Informationen könnten visualisiert werden, z. B. wie in nachfolgender Grafik.



Anschließend sollten zwei entscheidende Informationen herausgearbeitet werden:

1. Die Masse von Zink bleibt unverändert.
2. Kupfer wird hinzugefügt. Damit erhöht sich die Gesamtmasse der Messingschmelze.

Ergebniskontrolle im Kontext

Wenn im Lösungsansatz fälschlicherweise von einer gleich bleibenden Masse, hier 50 kg, ausgegangen wurde, könnte eine Ergebniskontrolle den entscheidenden Hinweis liefern, z. B. mit nachfolgender Übersicht.

m = 50 kg	Kupfer	Zink
Ausgangsschmelze	35 kg	15 kg
Schmelze mit erhöhtem Kupferanteil	37,5 kg	12,5 kg

In der Aufgabenstellung wird nichts über eine veränderte Masse von Zink ausgesagt, d. h. die Masse von Zink beträgt unverändert 15 kg. Die Schülerinnen und Schüler, die kritisch mit dem ermittelten Ergebnis umgehen, sollten erkennen, dass noch 2,5 kg Zink an 15 kg fehlen.

Nach der Reflexion der Ergebnisse müssen im nächsten Schritt geeignete Lösungsstrategien entwickelt werden. Hier wäre es empfehlenswert, keinen konkreten Lösungsansatz zu favorisieren. Die Schülerinnen und Schüler sollten Gelegenheit haben, verschiedene Lösungs-ideen zu entwickeln.

Nachfolgend werden einige aufgezeigt.

(1) Ermitteln mittels Prozentrechnung

Wenn der Kupferanteil auf 75 % erhöht wird, beträgt der Zinkanteil in der Schmelze 25 %. Demzufolge entsprechen 15 kg Zink jetzt 25 % der Messingschmelze. Daraus lässt sich die Gesamtmasse G der Messingschmelze ermitteln.

Der Ansatz $\frac{15 \text{ kg}}{25 \%} = \frac{G}{100 \%}$ liefert eine Gesamtmasse der Messingschmelze von $G = 60 \text{ kg}$.

Da nur Kupfer hinzugefügt wird, sind es 10 Kilogramm Kupfer.

(2) Ermitteln durch systematisches Probieren

Die hinzuzufügende Masse von Kupfer lässt sich durch systematisches Probieren, wie nachfolgend dargestellt, ermitteln:

Kupfer in kg	35	40	45	50
Messingschmelze in kg	50	55	60	65
Kupferanteil in der Messingschmelze	$\frac{35}{50} = 0,70$	$\frac{40}{55} \approx 0,72$	$\frac{45}{60} = 0,75$	$\frac{50}{65} \approx 0,77$

Hier wird bereits in der Anlage der Tabelle auf die Erhöhung des Kupferanteils und damit der Masse der Messingschmelze abgezielt. Aus dem ermittelten „Wertepaar 45|60“ lässt sich dann schlussfolgern, das 10 Kilogramm Kupfer hinzugefügt werden müssen.

(3) Ermitteln durch Lösen einer Bruchgleichung

Der Lösungsansatz $\frac{35 + x}{50 + x} = 0,75$ mit x als Masse des hinzuzufügenden Kupfers führt

ebenfalls zur gesuchten Lösung.

Das Aufstellen der Gleichung stellt einen hohen Anspruch dar, ebenso das kalkülmäßige Lösen der Bruchgleichung.

Sicher lassen sich weitere Lösungsideen entwickeln. Die Schülerinnen und Schüler sollten im Unterricht gefundene Lösungswege vorstellen und erläutern. Über Eignung und Güte könnte eine anschließende gemeinsame Diskussion der mathematischen Ideen befinden.