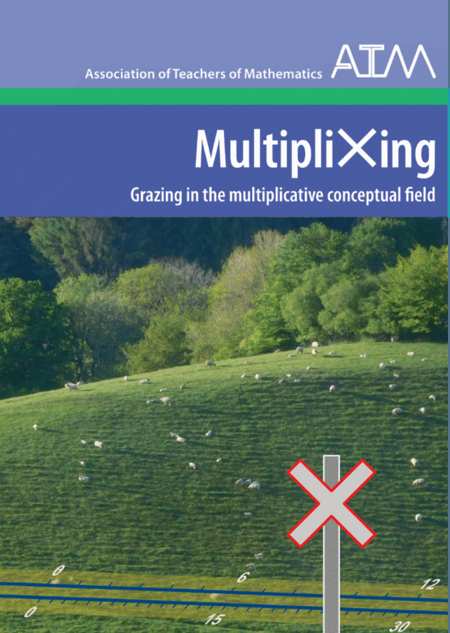


SLIDES

DEUTSCHE Ausgabe

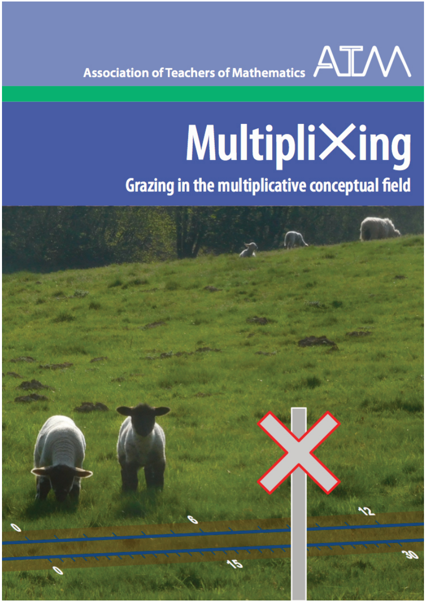
Diese pdf-Datei enthält 100 Aufgaben, in 20 ‘wöchentlichen’ Sätzen gesammelt. Ein Kommentar, der erklärt, wie man die Aufgaben benutzen kann, ist in dem Buch **MultipliXing** zu finden. Das Buch kann man von der *Association of Teachers of Mathematics* (ATM) erhalten:

https://www.atm.org.uk/maths-teaching-resources

Das Buch ist aber in Englisch geschrieben. Es ist aus einem Blog enstanden, auch in Englisch, den Sie hier finden können:

https://multiplixing.blogspot.com/

Die Einleitung zu dem Buch haben wir hier in Deutsch übersetzt (siehe die nächsten zwei Seiten).



Einleitung zu dem Buch MultipliXing

Das Buch ist für Mathematiklehrkräfte und andere am Mathematikunterricht Beteiligte geschrieben. Es bietet einen Kommentar zu einer Reihe von Aufgaben, bei denen es um **multiplikatives Denken** geht. Die Aufgaben selbst richten sich hauptsächlich an Lernende der Sekundarstufe (11 - 16 jährige). Viele könnten jedoch leicht für die Verwendung in der Grundschule angepasst werden.

Die zentralen Lerninhalte, die beim multiplikativen Denken eine Rolle spielen, sind Verhältnis, Proportion und rationale Zahl. Die Vielfalt der kontextbezogenen Situationen, in denen diese Inhalte angewendet werden, verdeutlicht, dass multiplikatives Denken ein reiches und vielfältiges Begriffsfeld bildet[1]. Meiner Ansicht nach gibt es in diesem Gebiet keinen optimalen Lernweg – in der Tat ist der Begriff des Lernweges selbst problematisch. Wenn sich Lernende mit einigen dieser Inhalte auseinandersetzen, dann entwickeln, stärken und rekonstruieren sie auch Verbindungen zu anderen Inhalten auf diesem Gebiet. So entwickeln die Lernenden allmählich ein stärker vernetztes und sichereres Verständnis für die Inhalte.

Anders ausgedrückt: Ein Begriff, wie z. B. das Verhältnis, hat viele Aspekte oder ‘Dimensionen’. Lernende, die in der Lage sind, eine Verhältnisaufgabe in einem Rezeptkontext zu lösen, wenn es eine einfache numerische Beziehung zwischen Zahlen im selben Maßraum gibt (z. B. ein Rezept für 4 Personen in ein Rezept für 12 Personen umzuwandeln), könnten aber Schwierigkeiten haben, wenn die einfache numerische Beziehung *zwischen* Maßräumen besteht (z. B. wenn gegeben ist, dass 4 Personen 12 Pfannkuchen benötigen, und man ermitteln will, wie viele Pfannkuchen 7 Personen demnach benötigen). Und Lernende, die erkennen, dass eine bestimmte Rezeptaufgabe multiplikativ ist, könnten eine Aufgabe, die dieselben Zahlen beinhaltet, aber in einem geometrischen Kontext steht, additiv[2] behandeln.

Die Aufgaben in diesem Buch wurden entwickelt, um Lernenden und Lehrkräften eine neue Perspektive auf multiplikatives Denken zu vermitteln. Einige können als Rätsel und als Ausgangspunkt für weitere mathematische Untersuchungen verwendet werden. Aber der Hauptzweck des Buches besteht darin, die Vielfalt des multiplikativen Denkens der Lernenden aufzuzeigen, und wir hoffen, dass dies den Lehrkräften helfen wird, die sinnvollen Bemühungen der Lernenden anzuerkennen und darauf aufzubauen. Es ist auch zu hoffen, dass die Bandbreite der Aufgaben, obwohl sie keineswegs erschöpfend ist, uns helfen wird, über die Natur und Vielfalt des Gebietes des multiplikativen Denkens nachzudenken und darüber, was einen Lehrplan für multiplikatives Denken effektiver machen würde.

Einige der Aufgaben in diesem Buch sind stärker strukturiert, als es nötig wäre, wenn sie „live“ verwendet werden – wo man die Aufgaben entsprechend der Antworten der Lernenden anpassen kann. Ich hoffe daher, dass Lehrkräfte, wenn sie die Aufgaben im Unterricht einsetzen, Wege finden, einige offener zu gestalten. Aus dem gleichen Grund sind einige Aufgaben ziemlich eng sequenziert. Aber vieles spricht dafür, am „tiefen Ende“ anzufangen. Dies ist bei einigen Aufgaben der Fall und ich hoffe, dass die Lehrkräfte hierfür weitere Gelegenheiten finden.

Das Buch gehört zu vier anderen, die von ATM veröffentlicht wurden, **Algebradabra**, **Algeburble**, **Geometric Sparks** und **Geometric Jolts**. Es hat das gleiche Format mit 100 Aufgaben, die in 20 „wöchentliche“ Sätze von 5 „täglichen“ Aufgaben unterteilt sind. Dieses Format sollte jedoch nicht zu wörtlich interpretiert werden. Es ist nicht beabsichtigt, dass Lehrkräfte eine dieser Aufgaben jeden Tag verwenden oder dass sie unbedingt in der angegebenen Reihenfolge verwendet werden sollten. Andererseits könnten viele der Aufgaben zu einer ganzen Unterrichtsstunde und viele der wöchentlichen Sätze zu einer Unterrichtsfolge ausgebaut werden. Es ist daher Sache der Lehrkraft zu entscheiden, welche Aufgaben im Klassenzimmer verwendet, wie sie angepasst und wie viel Unterrichtszeit ihnen gewidmet werden.

Abschließend möchte ich den Lesenden dringend bitten, eine Aufgabe durchzuarbeiten, bevor man den Kommentar dazu liest. Auf diese Weise wird man mehr aus der Aufgabe herausholen und der Kommentar wird sinnvoller!

Dietmar Küchemann
Associate, King’s College London
mietmau@gmail.com

1 Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Academic Press, New York.

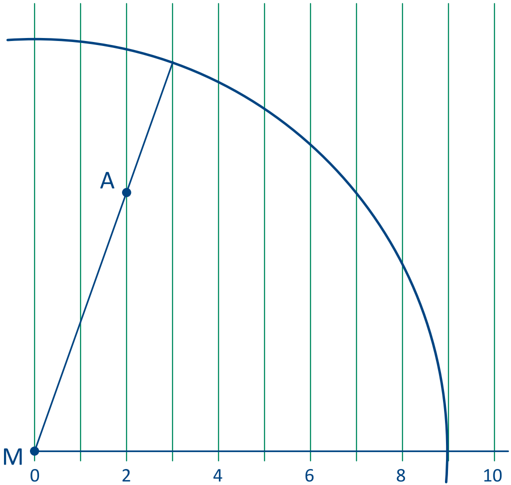
2 Küchemann, D. E. (2018). The influence of context and numerical complexity on the tendency to focus on scalar relations when solving missing-value ratio items. A study involving lower secondary school pupils and PGCE mathematics students. In Curtis, F. (Ed.) *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics*, 38 (3).

CONTENTS / INHALT

Betrachte das Diagramm.

Der Bogen ist Teil eines Kreises mit einem Radius von 9 cm und mit dem Mittelpunkt M.

Wie lang ist die Strecke $\overline{MA}$?

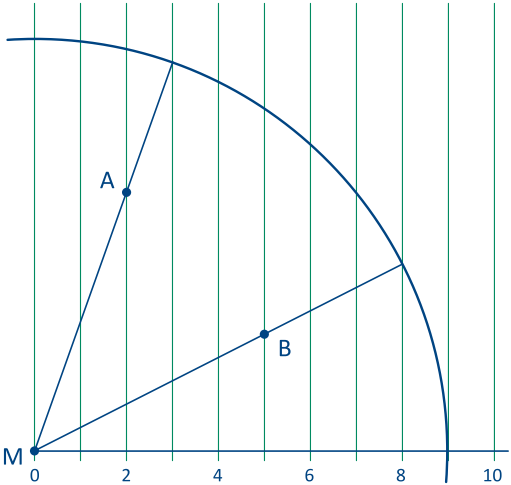


Betrachte das Diagramm.

Der Bogen ist Teil eines Kreises mit einem Radius von 9 cm und mit dem Mittelpunkt M.

Die Strecke $\overline{MA}$ ist 6 cm lang.

Ist sie kürzer,
genau so lang,
oder länger,
als die Strecke $\overline{MB}$?

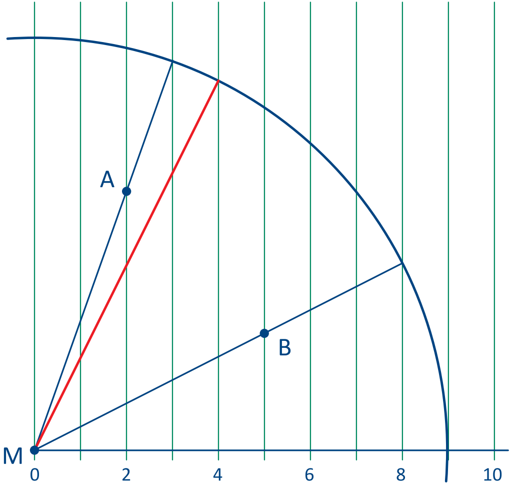


Betrachte das Diagramm.

Der Bogen ist Teil eines Kreises mit einem Radius von 9 cm und mit dem Mittelpunkt M.

Ein Punkt C soll so auf der roten Geraden liegen, dass $\overline{MC} = \overline{MB}$ gilt.

Beschreibe die genaue Lage von C.



Multiplixing
Grazing in the multiplicative conceptual field

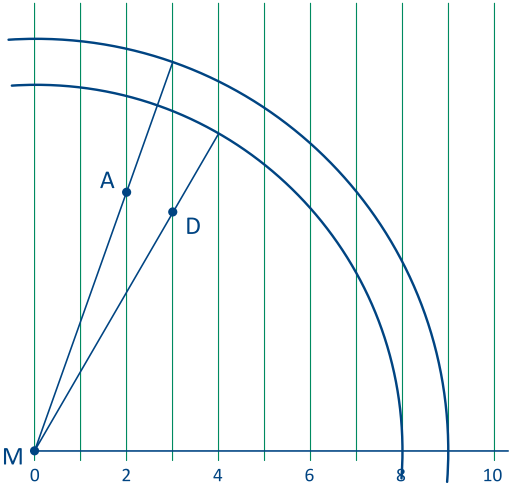
MUL 01C

mathsmed.co.uk

Betrachte das Diagramm.

Die Bögen sind Teile von Kreisen mit dem selben Mittelpunkt M.

Erkläre, warum $\overline{MA} = \overline{MD}$ gilt.



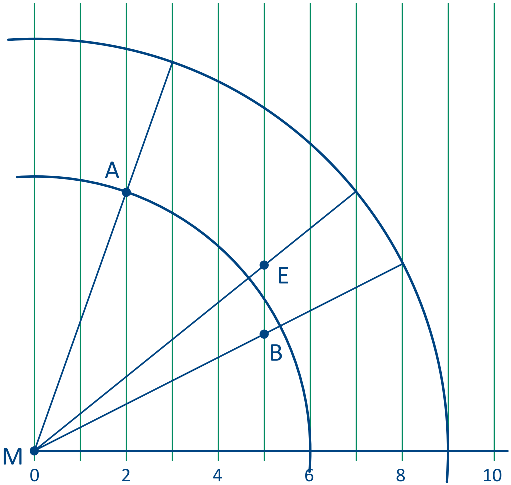
Betrachte das Diagramm.

Die Bögen sind Teile von Kreisen mit dem selben Mittelpunkt M.

Erkläre anhand des Diagramms, dass

a) $\frac{2}{3}$ kleiner als $\frac{5}{7}$ ist

b) $\frac{2}{3}$ größer als $\frac{5}{8}$ ist.



Ben denkt über den Wert von $(5\frac{1}{2})^2$ nach.

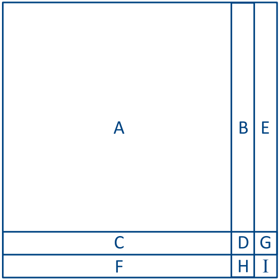
Er fragt sich, ob er näher zu 25 oder zu 36 ist, oder ob er genau dazwischen liegt.

1. Was ist deine Vermutung?
2. Überprüfe deine Vermutung, indem du einen Weg findest, den Wert zu berechnen.

Cleo denkt über den Flächeninhalt eines Quadrates mit $5\frac{1}{2}$ cm Seitenlänge nach.

Ihre Vermutung ist, dass der Flächeninhalt näher bei 25 cm^2 liegt als bei 36 cm^2.

1. Was ist deine Vermutung?
2. Erkläre, wie diese Zeichnung→ verwendet werden könnte, um Cleos Vermutung zu überprüfen.



Berechne den Wert von $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$, indem du für $5\frac{1}{2}$ diese verschiedenen Schreibweisen nutzt:

a) $\frac{11}{2}$

b) $5{,}5$

c) $\left(5 + \frac{1}{2}\right)$

d) $\left(6 - \frac{1}{2}\right)$

Dan und Enid versuchen den Wert von $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$ zu finden.

Dan sagt, er ist $25\frac{1}{4}$. Enid sagt, er ist $35\frac{3}{4}$.

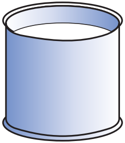
Erkläre, welche Rechenwege sie verwendet haben könnten, und was anscheinend schief gelaufen ist.

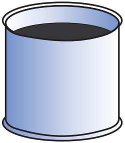
Fay versucht den Wert von $4\frac{3}{4} \times 5\frac{1}{4}$ zu finden.

Sie schreibt den Term so: $\left(5 - \frac{1}{4}\right) \times \left(5 + \frac{1}{4}\right)$.

Wenn sie dies berechnet, bekommt sie das Ergebnis $24\frac{15}{16}$.

1. Führe Fays Berechnung durch. Überprüfe ob sie richtig ist.
2. Studiere den Rechenweg genau.
   Verwende ihn, um den Wert von $9\frac{6}{7} \times 10\frac{1}{7}$ zu ermitteln.



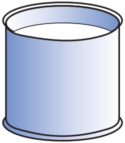


Paul und Vinz mischen weiße Farbe und schwarze Farbe, um graue Farbe zu machen.

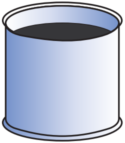
Paul mischt 12 Dosen weiße mit 7 Dosen schwarze Farbe.

Vinz mischt 13 Dosen weiße mit 8 Dosen schwarze Farbe.

Wessen Farbe ist heller, oder sind sie gleich?



Paul und Theo mischen weiße Farbe und schwarze Farbe, um graue Farbe zu machen.



Paul mischt 12 Dosen weiße mit 7 Dosen schwarze Farbe.

Theo mischt 1 Dose weiße mit 1 Dose schwarze Farbe und fügt dies Pauls Mischung hinzu.

Wird Pauls Farbe dadurch heller, oder dunkler, oder bleibt sie gleich?

Jan arbeitet in einem Geschäft am Londoner Flughafen Heathrow. Er füllt Preisschilder aus.

Ihm wird gesagt, dass für etwas, das 10 Pfund kostet, er 13 für den Preis in Dollar schreiben soll.

Er beschließt, für etwas mit einem Preis von 11 Pfund, 14 zu schreiben.

Ist das der richtige Preis, oder sollte er niedriger sein, oder höher sein?

Jan arbeitet in einem Geschäft am Londoner Flughafen Heathrow. Er füllt Preisschilder aus.

Ihm wird gesagt, dass für etwas, das 10 Pfund kostet, soll er 13 für den Preis in Dollar schreiben.

Er beschließt, für etwas mit einem Preis von 11 Pfund 14 Dollar zu schreiben.

Das nächste Etikett ist für 5 Pfund. Er beginnt 8 zu schreiben, hält dann aber inne - soll es niedriger sein?

Was denkst du?

KURT GEIGER
LONDON

£ 10 / $ 13

£ 11 / $ 14

£ 5 / $

Salvo folgt José, der die Treppen in sein Wohnhaus hinaufsteigt.

Wenn Salvo Stufe 10 erreicht hat, ist José bei Stufe 15.

Wenn Salvo Stufe 20 erreicht hat, ist José bei Stufe 25.

Wer steigt die Stufen schneller hoch?
Oder gehen beide etwa gleich schnell?

Ein Holzstreifen ist in vier Teile geschnitten.
Die Teile ergeben einen Rahmen um diesen Text.

Betrachte das innere und das äußere Rechteck, das der Rahmen bildet.

Welches Rechteck ist „quadratischer“?
Oder sind sie beide gleich „rechteckig“?

$$28592 : 6 = 4765\tfrac{1}{3}$$

$$\text{so } 28594 : 6 = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$7247\tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{6} = 43484$$

$$\text{so } 7248\tfrac{1}{3} : \tfrac{1}{6} = \text{..............}$$

$$17283\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = 6913\tfrac{2}{5}$$

$$\text{so } 17293\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$17283\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = 6913\tfrac{2}{5}$$

$$\text{so } 17284\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$17283\tfrac{1}{2} : 2\tfrac{1}{2} = 6913\tfrac{2}{5}$$

$$\text{so } 17283\tfrac{1}{2} : 25 = \text{.............}$$

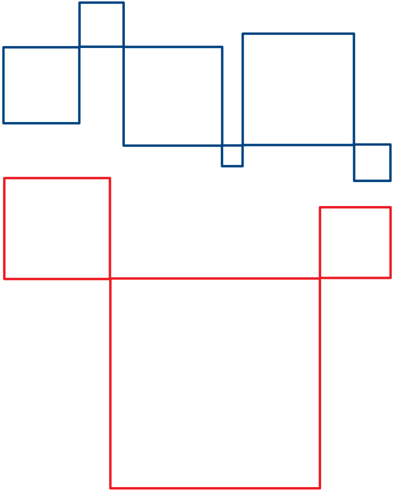
Diese beiden Figuren bestehen aus Quadrate.

Welche Figur hat den größeren Gesamtumfang:

die mit den **blauen** Quadrate

oder

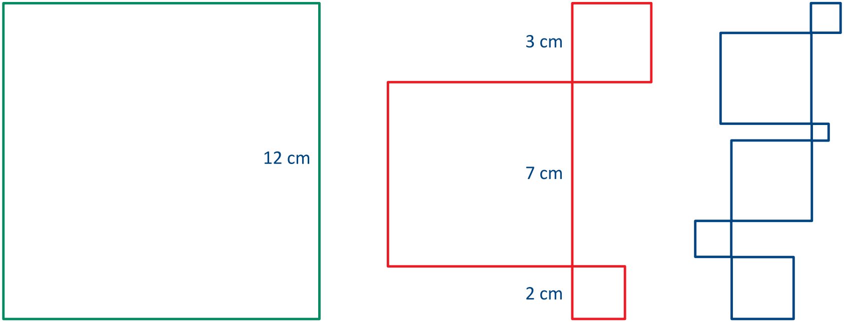
die mit den **roten** Quadrate?



Alle diese Figuren bestehen aus Quadraten.

Bestimme die Gesamtlänge

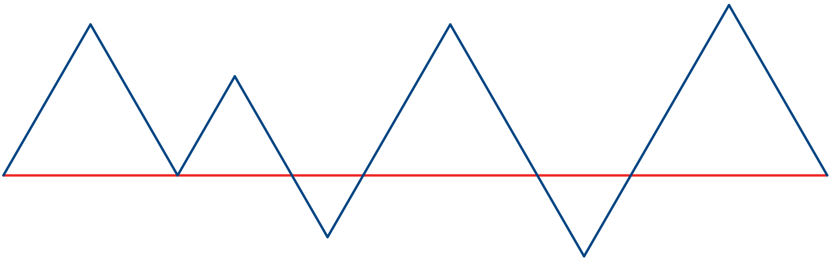
a) der **grünen** Linien b) der **roten** Linien c) der **blauen** Linien.



Die Abbildung zeigt sechs gleichseitige Dreiecke.

Die **rote** Gerade ist 18 cm lang.

Wie lang sind die **blauen** Linien insgesamt?



Multiplixing
Grazing in the multiplicative conceptual field

MUL
05C

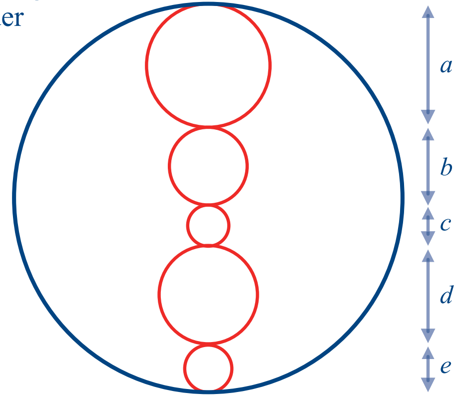
mathsmed.co.uk

Die blaue und die rote gekrümmte Linie bestehen beide aus dem Buchstaben e.

Jedes e hat genau die gleiche Form wie dieses e:

Eva sagt, die gekrümmten Linien sind gleich lang.
Hat sie Recht? Erkläre deine Antwort.

Zeige, dass der Umfang des **blauen** Kreises gleich der Summe der Umfänge der fünf **roten** Kreise ist.



The sack contains 1 hundredweight (about 50kg) of coal.

In the UK, a hundredweight (*cwt.*) is equal to 8 stones (*st.*) and a stone is equal to 14 pounds (*lb.*). (A pound is about 0.5 kg.)

1. Convert this quantity into pounds: 3 *cwt.* 1 *st.* 10 *lb.*

   Check that it is divisible by 6 (can be split into 6 equal lots of *whole* numbers of pounds).

2. Explain how we can tell, without first converting it into pounds, that 5 *cwt.* 4 *st.* 0 *lb.* is

   a) divisible by 7 b) divisible by 8.

Photograph:

In the UK, a hundredweight (*cwt.*) is equal to 8 stones (*st.*) and a stone is equal to 14 pounds (*lb.*).

Explain how we can tell, without first converting it into pounds, that this quantity is *not* divisible by 14 (can *not* be split into 14 equal lots of *whole* pounds):

9 *cwt.* 5 *st.* 1 *lb.*

In the UK, a hundredweight (*cwt.*) is equal to 8 stones (*st.*) and a stone is equal to 14 pounds (*lb.*).

a) Convert 5 *cwt.* 4 *st.* 2 *lb.* into pounds.
Check that it is divisible by 3.

b) Calculate 5 *cwt.* 4 *st.* 2 *lb.* $\div$ 3
without first converting it into pounds.

In the UK, a hundredweight (*cwt.*) is equal to 8 stones (*st.*) and a stone is equal to 14 pounds (*lb.*).

1. It turns out that 5 *cwt.* 4 *st.* 2 *lb.* is divisible by 3.

   So which of these must also be divisible by 3?

   a. 5 *cwt.* 4 *st.* 5 *lb.* b. 5 *cwt.* 7 *st.* 2 *lb.* c. 8 *cwt.* 4 *st.* 2 *lb.*

2. It turns out that 4 *cwt.* 5 *st.* 6 *lb.* is divisible by 4.

   So which of these must also be divisible by 4?

   a. 4 *cwt.* 5 *st.* 10 *lb.* b. 4 *cwt.* 7 *st.* 6 *lb.* c. 5 *cwt.* 5 *st.* 6 *lb.*

In the UK, a hundredweight (*cwt.*) is equal to 8 stones (*st.*) and a stone is equal to 14 pounds (*lb.*).

1. Check this calculation in your head:

$$3 \times 5\,\mathit{cwt.}\,4\,\mathit{st.}\,10\,\mathit{lb.} = 16\,\mathit{cwt.}\,6\,\mathit{st.}\,2\,\mathit{lb.}$$

2. Perform these calculations in your head.

   (Look for shortcuts that might help you!)

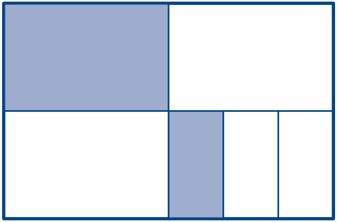
   Just write down the answer.

   a) $14 \times 2\,\mathit{cwt.}\,0\,\mathit{st.}\,8\,\mathit{lb.}$

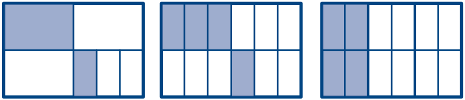
   b) $8 \times 2\,\mathit{cwt.}\,5\,\mathit{st.}\,7\,\mathit{lb.}$

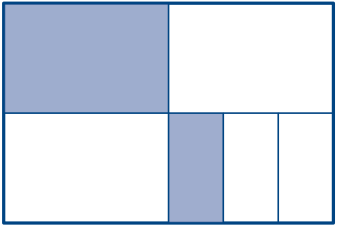
Das große Rechteck ist in kleinere Rechtecke aufgeteilt.

Welcher Anteil des großen Rechtecks ist blau getönt?

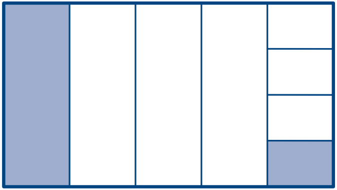


Wir können zeigen, dass $\frac{1}{3}$ des großen → Rechtecks blau getönt ist, indem wir die blauen Bereiche neu anordnen↓.

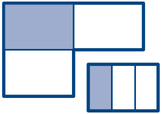


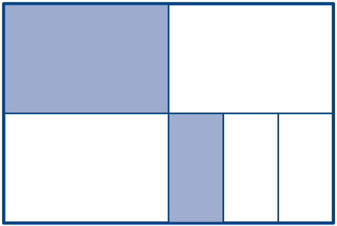


Verwende diese Methode, um festzustellen, wie viel von diesem Rechteck blau getönt ist.

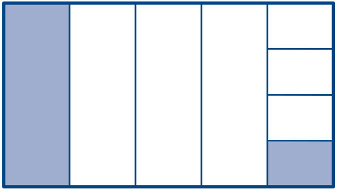


Wir können sehen, dass $\frac{1}{3}$ des großen → Rechtecks blau getönt ist, weil wir es in zwei Stücke teilen können,→ von denen jedes $\frac{1}{3}$ blau ist.

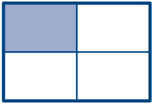




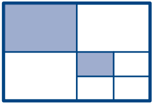
Verwende diese Methode, um festzustellen, wie viel von diesem Rechteck blau getönt ist.



Ein Viertel von dieser Figur ist blau getönt.

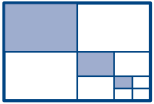


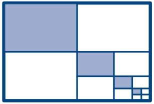
$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$ von dieser Figur ist blau getönt.



a) Bestimme, wieviel von jeder dieser beiden Figuren↓ blau getönt ist.

b) Zeige, dass der Blauanteil in jeder der vier Figuren immer näher an $\frac{1}{3}$ herankommt.





Berechne diese Terme.

$$\frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{25} + \frac{1}{125} + \frac{1}{625}$$

Zeige, dass die Werte immer näher an $\frac{1}{4}$ herankommen.

Was bewegt sich schneller?

Ein Punkt am äußeren Rand einer 12-Zoll-LP, die sich mit 33⅓ Umdrehungen pro Minute dreht,

oder

ein Punkt am äußeren Rand einer 7-Zoll-Single, die sich mit 45 Umdrehungen pro Minute dreht?

Eine übliche Drehzahl für einen seriengefertigten Elektromotor ist 3600 U/min.

1. Überprüfe, ob ein Getriebe mit einem Verhältnis von 80 : 1 diese auf 45 U/min reduziert.
2. Welches Getriebeverhältnis reduziert 3600 U/min auf 33⅓ U/min?

Diese 7-Zoll-Single dreht sich mit 45 U/min.
Das Stück **Green Onions** dauert 2:56 Minuten.

Die Musik beginnt, wenn die Plattennadel 84 mm von der Mitte der Platte entfernt ist, und endet, wenn sie 56 mm von der Mitte entfernt ist.

84 mm

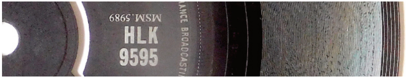
56 mm

Der Teil der Plattenrille, der die Musik trägt, sieht aus wie eine Reihe dicht liegender Einzelrillen. Wie weit sind sie ungefähr voneinander entfernt?

Diese 7-Zoll-Single dreht sich mit 45 U/min.
Das Stück **Green Onions** dauert 2:56 Minuten.

Die Musik beginnt, wenn die Plattennadel 84 mm von der Mitte der Platte entfernt ist, und endet, wenn sie 56 mm von der Mitte entfernt ist.

84 mm



56 mm

Schätze die Länge der Schallplattenrille, die die Nadel, von Anfang bis Ende der Musik, überfährt.

Diese 7-Zoll-Single dreht sich mit 45 U/min. Das Stück Green Onions dauert 2:56 Minuten.

Die Plattennadel ist 84 mm von der Mitte der Platte entfernt, wenn die Musik beginnt, und 56 mm entfernt, wenn sie endet.

Also ist die Plattenrille, vom Anfang bis zum Ende der Musik, etwa 58.000 mm oder 58 m lang.

Kat sagt: *Also wird die Nadel etwa 29 m davon zurückgelegt haben, wenn die Musik halbwegs durch ist.*

Hat Kat Recht? Begründe deine Antwort.

Burt und seine Mutter haben beide heute Geburtstag.

Burts Mutter ist 3 mal so alt wie Burt.

Wird sie in einem Jahr
immer noch 3 mal so alt sein wie Burt,
oder weniger als 3 mal,
oder mehr als 3 mal?

Burt und seine Mutter haben beide heute Geburtstag.

Burts Mutter ist 3 mal so alt wie Burt.

Wie alt ist sie jetzt, wenn sie in 10 Jahren nur doppelt so alt sein wird wie Burt?

Burt und seine Mutter haben beide heute Geburtstag.

Burts Mutter ist 30 Jahre alt und Burt ist 10 Jahre alt.
Sie ist also 3 mal so alt wie Burt.

Wie alt war Burt, als seine Mutter 4 mal so alt war wie er?

Kim und Ken essen Sahnetorte in einem Café.

Kim hat eine Tasse Tee und ein Stück Torte.
Ken hat eine Tasse Tee und drei Stück Torte.

Die Rechnung beträgt 20 €.

Kim sagt:
Wenn ich 5 € zahle und du 15 € zahlst, ist das gerecht.

Hat sie recht, oder sollte sie mehr zahlen, oder sollte sie weniger zahlen?

Eine Werkstatt beschäftigt 10 Personen.

Der wöchentliche Gesamtlohn beträgt 5.000 €, aber der Eigentümer hat beschlossen, diesen um 2 %, also 100 €, zu erhöhen.

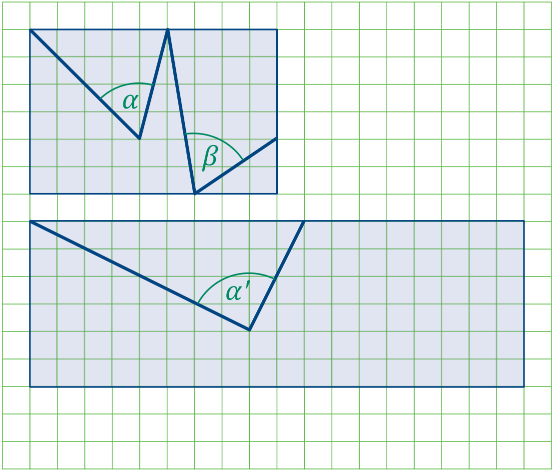
Was denkst du, wäre beliebter,

- eine Erhöhung um 10 € pro Woche für jede Person, oder
- eine Erhöhung des Lohns um 2 % für jede Person?

Das Rechteck ist ein →
elastischer Streifen.
Darauf sind einige
Strecken gezeichnet.

Der Streifen wird
mit dem Faktor ×2
horizontal gestreckt.

1. Kopiere und ergänze die Zeichnung des gestreckten Streifens.
2. Was ist die neue Größe der Winkel α und β?



Multiplixing
Grazing in the multiplicative conceptual field

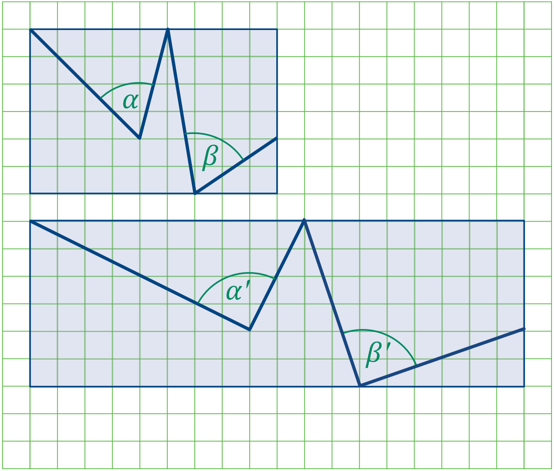
MUL
10A

mathsmed.co.uk

Das Rechteck ist ein → elastischer Streifen. Darauf sind einige Strecken gezeichnet.

Der Streifen wird mit dem Faktor ×2 horizontal gestreckt.

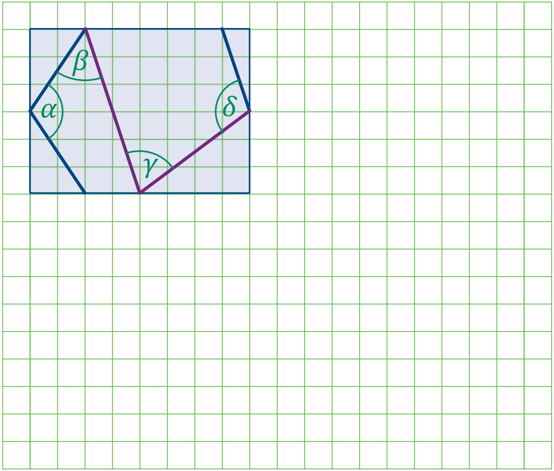
1. Wie kann man zeigen, dass $\alpha' = \beta' = 90°$?
2. Daisy sagt, wenn $\alpha' = \beta'$, dann $\alpha = \beta$. Stimmt das?



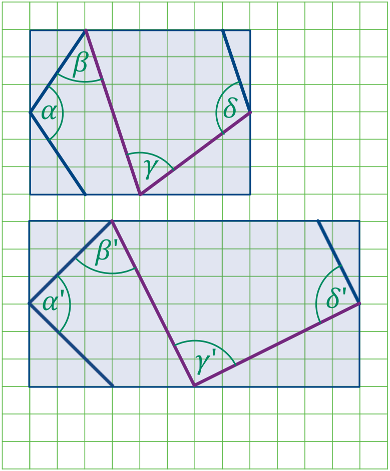
Das Rechteck ist ein → elastischer Streifen. Darauf sind einige Strecken gezeichnet.

Der Streifen wird horizontal gestreckt, bis drei der markierten Winkel rechte Winkel werden.

Ermittle den Faktor für die Streckung und skizziere den gestreckten Streifen.

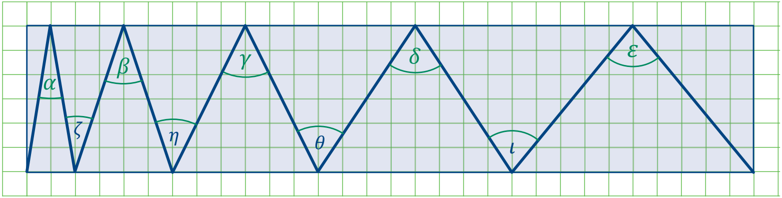


Das Rechteck ist ein elastischer Streifen. Darauf sind einige Strecken gezeichnet.→



Der Streifen wird mit dem Faktor ×1,5 horizontal gestreckt. Einige der markierten Winkel sind jetzt rechte Winkel.

1. Welche Winkel sind jetzt rechte Winkel?
2. Die gestreckten lila Strecken sind gleich lang. Daisy sagt: *Also sind die originalen lila Strecken auch gleich Lang*. Stimmt das?



Hier↑ ist ein elastischer Streifen, auf dem mehrere Strecken gezeichnet sind.

Wähle einen der Winkel α, β, γ, δ oder ε. Stell dir vor, der Streifen wird horizontal gestreckt, so dass der gewählte Winkel ein rechter Winkel wird.

1. Wie groß ist der Faktor der Streckung?
2. Könnte Winkel ζ, η, θ oder ι jetzt auch ein rechter Winkel geworden sein?

Len untersucht Möglichkeiten, 78 als Produkt zweier Zahlen zu schreiben. Er schreibt zunächst 78 als Summe zweier Zahlen.

Wählt er „schöne" Summen, kann das Rechnen sehr leicht werden,

wie hier: $78 = 60 + 18 = 6\times10 + 6\times3 = 6\times13$

oder hier: $78 = 75 + 3 \quad = 3\times25 + 3\times1 = 3\times26$.

Verwende Lens Methode. Suche weitere „schöne" Summen, um 78 als Produkt zweier Zahlen zu schreiben.

Liz untersucht Möglichkeiten, 78 als Produkt zweier Zahlen zu schreiben. Sie schreibt zunächst 78 als Differenz zweier Zahlen.

Wählt sie „schöne“ Differenzen, kann das Rechnen sehr leicht werden,

wie hier: $78 = 90 - 12 = 3 \times 30 - 3 \times 4 = 3 \times 26$

oder hier: $78 = 80 - 2 = 2 \times 40 - 2 \times 1 = 2 \times 39$.

Verwende Lizs Methode. Suche weitere „schöne“ Differenzen, um 78 als Produkt zweier Zahlen zu schreiben.

Len untersucht Möglichkeiten, 78 als Produkt zweier Zahlen zu schreiben. Er schreibt zunächst 78 als Summe zweier Zahlen.

Wählt er „schöne“ Summen, kann das Rechnen sehr leicht werden, wie hier: $78 = 60 + 18 = 6\times10 + 6\times3 = 6\times13$.

Aber manche Summen helfen nicht,
wie hier: $78 = 71 + 7$, oder hier: $78 = 35 + 43$.

Suche weitere Summen für 78, die nicht hilfreich sind.
Was ist das Besondere an diesen Summen?

Len untersucht Möglichkeiten, 91 als Produkt zweier Zahlen zu schreiben. Er schreibt zunächst 91 als Summe oder Differenz zweier Zahlen.

Er probiert diese, aber keine davon hilft:

$91 = 80 + 11$, $91 = 100 - 9$ und $91 = 50 + 41$.

Suche Summen und Differenzen für 91, die helfen könnten.
Was ist das Besondere an diesen Summen und Differenzen?

Len will jede dieser Zahlen als Produkt zweier Zahlen schreiben.

195, 196, 197, 187.

Er beginnt, für jede dieser Zahlen, sie als Summe oder Differenz zweier Zahlen zu schreiben.

Verwende Lens Methode für jede dieser Zahlen.

Erkläre, warum die Methode bei manchen Zahlen erfolgreich ist und bei anderen nicht.

Das Orangenkonzentrat in Flasche A ist doppelt so stark wie das in Flasche B.

Was schmeckt stärker,

50 ml aus Flasche A mit
1 Liter Wasser gemischt,

oder

100 ml aus Flasche B mit
1 Liter Wasser gemischt?

Oder schmecken sie gleich?

A

B

Das Orangenkonzentrat in Flasche A ist doppelt so stark wie das in Flasche B.

200 ml aus Flasche A werden mit 1 Liter Wasser gemischt.

Wie viele ml von Flasche B, gemischt mit 1 Liter Wasser, ergeben das gleich schmeckende Getränk?

A B

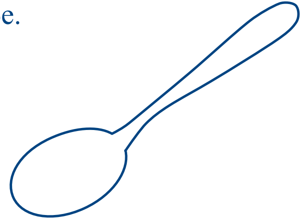
Rowena mischt 200 ml Johannisbeersirup mit 1 Liter Wasser.

Welche dieser Mengen, mit 1 Liter Wasser gemischt, ergibt ein genau halb so starkes Getränk?

a. 100 ml Sirup

b. 100 ml Sirup plus 100 ml Wasser.

Ruby und Stan machen beide eine Salatsoße.



Ruby mischt 1 Esslöffel Essig
mit 3 Esslöffeln Olivenöl.

Stan mischt 2 Esslöffel Essig
mit 3 Esslöffeln Olivenöl.

Stan sagt zu Ruby:

Ein Löffel von meiner Salatsoße enthält doppelt so viel Essig wie ein Löffel von deiner.

Hat Stan Recht?

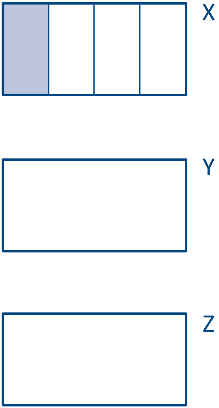
Die Rechtecke X, Y und Z sind kongruent.

Im Rechteck X ist das Verhältnis des getönten zum nicht getönten Bereich 1 : 3.

Ein Teil von Y wird so getönt, dass das Verhältnis von getöntem zu nicht getöntem Bereich 2 : 3 ist.

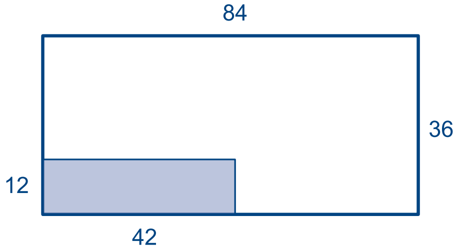
Ein Teil von Z wird so getönt, dass der getönte Bereich doppelt so groß ist wie der getönte Bereich in X.

Ist der getönte Bereich in Y oder in Z größer, oder sind sie gleich?

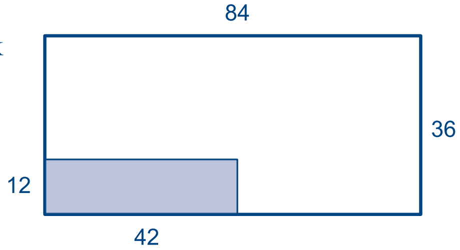


Die Abbildung zeigt ein Rechteck mit einer Länge von 84 mm und einer Breite von 36 mm.

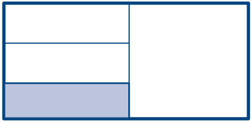
Welcher Bruchteil des Rechtecks ist blau getönt?



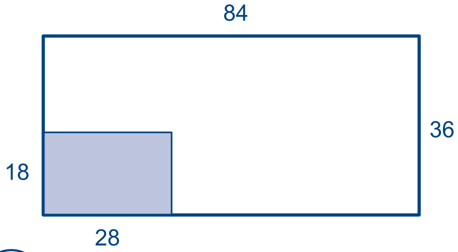
Diese Abbildung zeigt ein Rechteck mit einer Länge von 84 mm und einer Breite von 36 mm.→



Wir können uns den getönten Bereich als $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{2}$ des Rechtecks vorstellen, was $\frac{1}{6}$ ist.

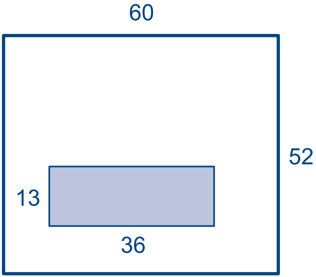


Verwende diese Denkweise, um herauszufinden, welcher Bruchteil dieses Rechtecks blau getönt ist.

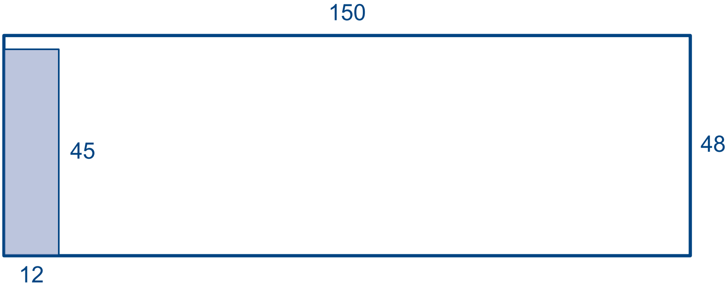


Die Abbildung zeigt ein Rechteck mit einer Länge von 60 mm und einer Breite von 52 mm.

Welcher Bruchteil des Rechtecks ist blau getönt?

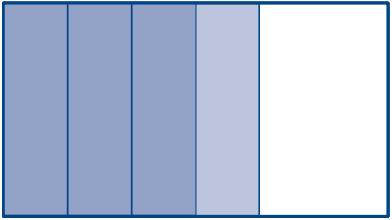


Betrachte diese Abbildung. Es zeigt ein Rechteck mit einer Länge von 150 mm und einer Breite von 48 mm.



Welcher Bruchteil des Rechtecks ist blau getönt?

Schau diese Abbildung genau an.

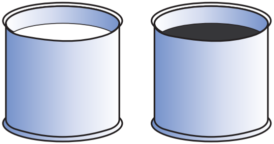


Damit kann man zeigen, dass $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ gleich $\frac{1}{2}$ ist.

a) Zeichne eine ähnliche Abbildung, die zeigt, dass $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ gleich $\frac{1}{2}$ ist.

b) Finde ein anderes Paar Brüche, das auf diese Weise $\frac{1}{2}$ ergibt.
Zeichne eine Abbildung, um zu zeigen, wie das passiert.

Paul und Vinz mischen weiße und schwarze Farbe, um graue Farbe zu machen.

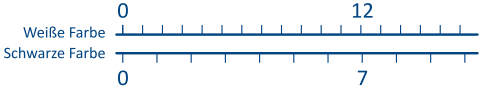


Paul mischt 12 Dosen weiße mit 7 Dosen schwarze Farbe.

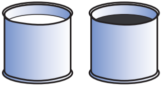
Vinz mischt 13 Dosen weiße mit 8 Dosen schwarze Farbe.

Wessen Farbe ist heller, oder sind sie gleich?

Erkläre, wie man diesen doppelten Zahlenstrahl verwenden könnte, um zu entscheiden.



Paul und Vinz mischen weiße und schwarze Farbe, um graue Farbe zu machen.

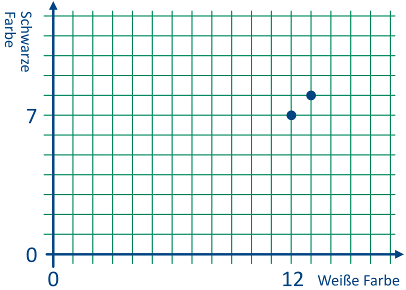


Paul mischt 12 Dosen weiße mit 7 Dosen schwarze Farbe.

Vinz mischt 13 Dosen weiße mit 8 Dosen schwarze Farbe.

Wessen Farbe ist heller, oder sind sie gleich?

Erkläre, wie man die beiden Punkte in diesem Diagramm verwenden könnte, um zu entscheiden.



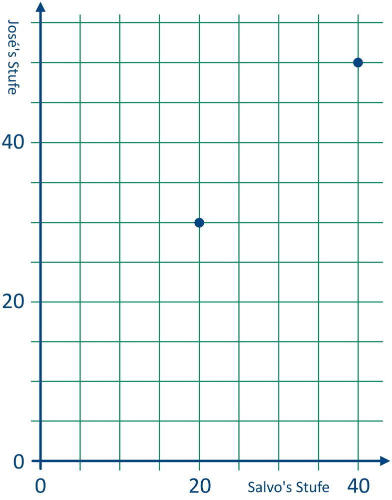
Salvo folgt José, der die Spanische Treppe in Rom hinaufsteigt.

Wenn Salvo Stufe 20 erreicht hat, ist José bei Stufe 30.

Wenn Salvo Stufe 40 erreicht hat, ist José bei Stufe 50.

Wer steigt die Stufen schneller hoch, oder geht es etwa gleich schnell?

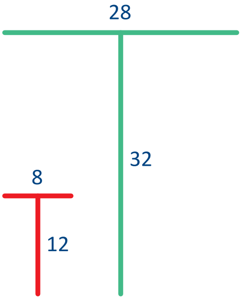
Erkläre, wie man die beiden Punkte in diesem Diagramm verwenden könnte, um zu entscheiden.



Hier sind zwei T-Formen:

Das rote T ist 8 cm breit und 12 cm hoch.
Das grüne T ist 28 cm breit und 32 cm hoch.

Schau diese Tabellen an:



+4	8	28	+4
	12	32	

$\times 1\frac{1}{2}$	8	28	$\times 1\frac{1}{7}$
	12	32	

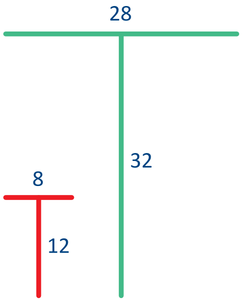
Adele sagt, beide Buchstaben sind 4 cm höher als breit, also sind sie einander ähnlich.

Miley sagt, das rote T ist $1\frac{1}{2}$ mal so hoch wie breit, aber das grüne T ist nur $1\frac{1}{7}$ mal so hoch wie breit, also sind sie einander nicht ähnlich.

Stimmst du Adele oder Miley zu, oder keiner der beiden?

Hier sind zwei T-Formen:

Das rote T ist 8 cm breit und 12 cm hoch.
Das grüne T ist 28 cm breit und 32 cm hoch.



Schau diese Tabellen an:

$+20$

8	28
12	32

$+20$

$\times 3\frac{1}{2}$

8	28
12	32

$\times 2\frac{2}{3}$

Adele sagt, das grüne T ist 20 cm breiter und 20 cm höher als das rote T, also sind die Buchstaben einander ähnlich.

Miley sagt, das grüne T ist $3\frac{1}{2}$ mal so breit wie das rote T, aber nicht $3\frac{1}{2}$ mal so hoch, also sind die Buchstaben einander nicht ähnlich.

Stimmst du Adele oder Miley zu, oder keiner der beiden?

Der Wert von $31{,}6^2$ ist fast genau 1000.

Stelle fest, um wie viel größer $32{,}6^2$ als $31{,}6^2$ ist, ohne deren tatsächlichen Werte zu berechnen.

Betrachte diese drei Zahlen.

$29^2 \quad 30^2 \quad 31^2$

Ohne deren Werte zu berechnen, was vermutest du?
Liegt die zweite Zahl näher an der ersten Zahl oder näher an der dritten Zahl? Oder liegt sie genau dazwischen?

Begründe deine Vermutung.

Jay sieht sich diese Gleichungen an.

$$30^2 - 29^2 = 59 \quad \text{und} \quad 31^2 - 30^2 = 61$$

Er sagt:

Ich glaube, ich habe eine Regel gefunden. Wenn ich zum Beispiel $26^2 - 25^2$ finden wollte, ergibt das nach meiner Regel den Wert 51.

Was könnte Jays Regel sein?

Funktioniert die Regel immer? Erkläre deine Antwort.

Kay kennt einen Weg, um zu überprüfen, dass $26^2 - 25^2 = 51$.

Sie nutzt diese drei Schritte:

Schritt 1: Ich weiss 25×26 ist 25 mehr als 25^2.

Schritt 2: Ich weiss 26×26 ist ___ mehr als 25×26.

Schritt 3: Also $26^2 - 25^2 = 25 + \_\_\_ = \_\_\_$.

a) Erkläre, warum Schritt 1 stimmt.

b) Ergänze Schritt 2.

c) Ergänze Schritt 3.

Elle sieht sich diese Gleichungen an.

$30^2 - 29^2 = 59$ und $31^2 - 30^2 = 61$

Sie sagt:

Die Gleichungen sagen mir, dass $31^2 - 29^2 = 120$.

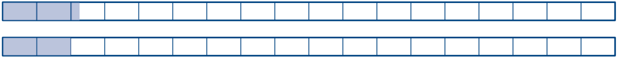
Ich glaube, ich habe eine Regel gefunden. Wenn ich zum Beispiel $26^2 - 24^2$ finden wollte, ergibt das nach meiner Regel den Wert 100.

Was könnte Elles Regel sein?

Funktioniert die Regel immer? Erkläre deine Antwort.

Freda möchte die Differenz zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ ermitteln.

Sie denkt an zwei Papierstreifen, jeweils 18 cm lang.
Dann ist $\frac{1}{8}$ eines Streifens $2\frac{1}{4}$cm lang und $\frac{1}{9}$ ist 2cm lang.



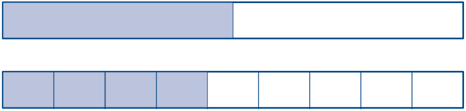
Die Differenz beträgt also $\frac{1}{4}$cm, und $\frac{1}{4}$cm von 18cm ist $\frac{1}{72}$.

a) Wende Fredas Methode auf Streifen an, die 24 cm lang sind.

b) Wähle andere Längen für die Streifen.
Mit welchen kann man die Differenz gut ermitteln,
mit welchen nicht so gut?

Frodo möchte die Differenz zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ ermitteln.

Er zeichnet diese zwei gleich langen Streifen:



Er sagt:

Ich kann sehen, die Differenz zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{9}$ beträgt $\frac{1}{18}$.

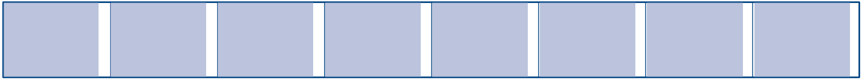
Die Differenz zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ beträgt also $\frac{1}{72}$.

a) Erkläre den letzten Schritt von Frodos Methode.

b) Benutze Frodos Methode, um $\frac{1}{10} - \frac{1}{11}$ zu ermitteln.

Flo möchte die Differenz zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$ ermitteln.

Sie zeichnet sorgfältig einen Streifen wie diesen, wobei jeder getönte Abschnitt $\frac{1}{9}$ der gesamten Figur ist:



Jeder weiße Abschnitt zeigt die Differenz zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{9}$.
Und insgesamt bedecken die 8 weißen Abschnitte $\frac{1}{9}$ der gesamten Figur.
Die Differenz zwischen $\frac{1}{8}$ and $\frac{1}{9}$ beträgt also $\frac{1}{72}$.

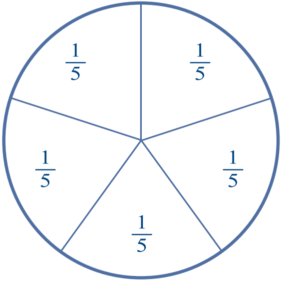
Erkläre Flos Methode. Benutze sie, um $\frac{1}{10} - \frac{1}{11}$ zu ermitteln.

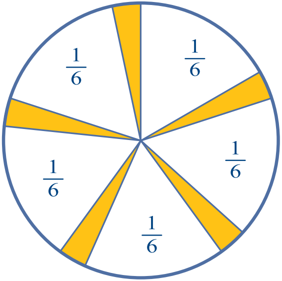
Jeder gelbe Abschnitt zeigt die Differenz zwischen $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{6}$ des Kreises.

Welcher Bruchteil des Kreises wird bedeckt von

a) allen gelben Abschnitten?

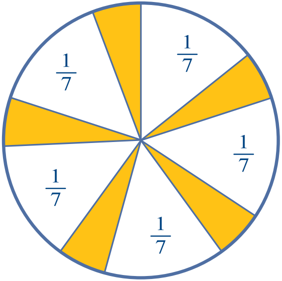
b) jedem einzelnen Abschnitt?





Jeder weiße Abschnitt bedeckt $\frac{1}{7}$ des Kreises.

Welcher Bruchteil des Kreises wird von jedem einzelnen gelben Abschnitt bedeckt?



Multiplixing
Grazing in the multiplicative conceptual field

MUL
17E

Die Abbildung zeigt eine Stange AB mit den Massen von 6 kg bei A und 2 kg bei B. Die Stange ist 20 m lang und „schwerelos“!

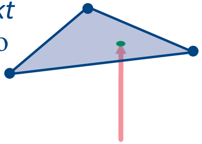
Die Massen balancieren an einem Punkt P auf der Stange, 5 m von A und 15 m von B entfernt. Kannst du erklären, warum?

P ist der ***Schwerpunkt*** der Massen. Beachte: die Massen stehen im Verhältnis 6:2 = 3:1 und ihre Abstände von P im Verhältnis 5:15 = 1:3.

Wenn bei A eine Masse von 4,5 kg hinzugefügt wird, welche Masse muss bei B hinzugefügt werden, damit sich der Schwerpunkt nicht ändert?

Das Diagramm zeigt ein starres, aber schwereloses dreieckiges Stück Plexiglas. Es hat Massen von 4g, 6g und 2g an den Ecken A, B und C.

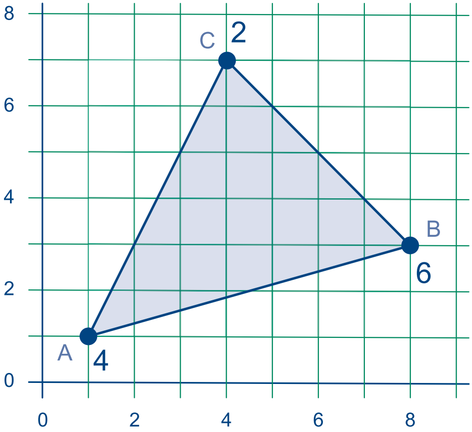
Der *Schwerpunkt* ist der Punkt, wo die Massen ausbalanciert sind.



Ein Punkt P hat Koordinaten (7; 4). P teilt $\overline{BC}$ im Verhältnis 1:3.

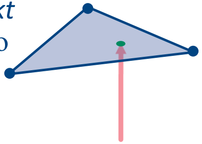
a) Erkläre, warum der Punkt S, der Schwerpunkt der drei Massen, auf der Linie $\overline{AP}$ liegt.

b) Ermittle die Koordinaten von S.



Das Diagramm zeigt ein starres, aber schwereloses dreieckiges Stück Plexiglas. Es hat Massen von 4g, 6g und 2g an den Ecken A, B und C.

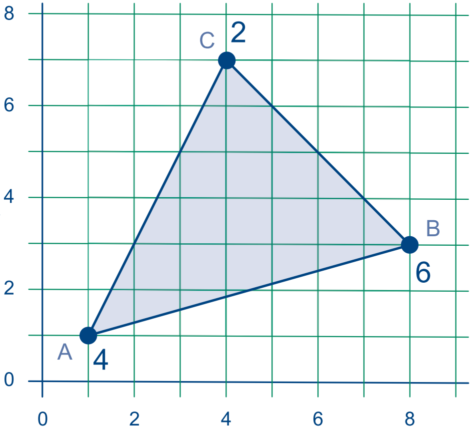
Der *Schwerpunkt* ist der Punkt, wo die Massen ausbalanciert sind.



Ein Punkt Q hat Koordinaten (2; 3). Q teilt $\overline{AC}$ im Verhältnis 1:2.

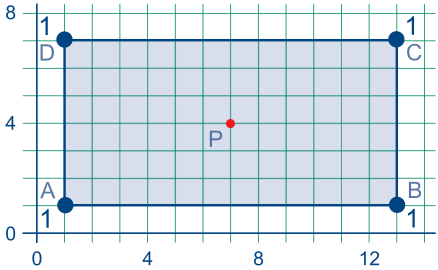
a) Erkläre, warum der Punkt S, der Schwerpunkt der drei Massen, auf der Linie $\overline{BQ}$ liegt.

b) Ermittle die Koordinaten von S.



Das Rechteck ABCD ist ein starres, aber schwereloses Stück Plexiglas. Es hat Massen von 1g an jeder Ecke A, B, C und D.

Der *Schwerpunkt* der vier Massen liegt im Punkt P in der Mitte des Rechtecks.



Ein weiteres Massenstück wird an der Ecke C hinzugefügt.

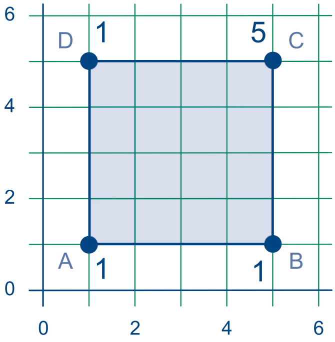
a) Was passiert mit der Position des Schwerpunktes?

b) Wie groß ist dieses weitere Massenstück, wenn der Schwerpunkt jetzt bei (11; 6) liegt?

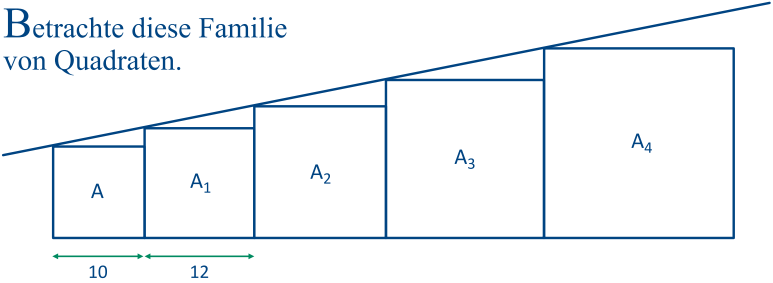
Das Quadrat ABCD ist ein starres, aber schwereloses Stück Plexiglas. Die Seiten sind 4 cm lang. Massenstücke von 1g, 1g, 5g und 1g befinden sich an den Ecken A, B, C und D.

a) Finde den Schwerpunkt der vier Massen.

b) Weitere Massenstücke werden an den Ecken A und D hinzugefügt.
Wie groß sind diese Massenstücke, wenn sich der Schwerpunkt 1 cm nach links bewegt?



Betrachte diese Familie von Quadraten.

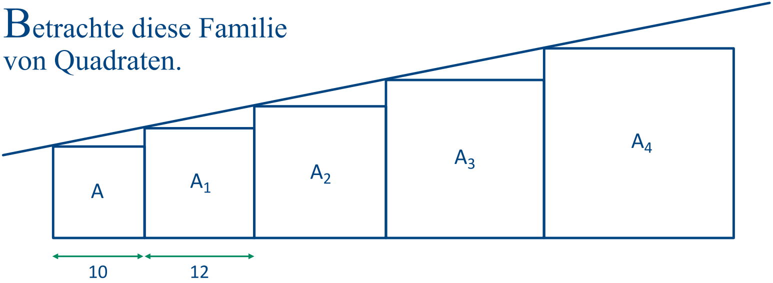


Die Quadrate A und A_1 haben Seitenlängen von 10 cm und 12 cm.

Die Seiten von Quadrat A_4 scheinen etwa doppelt so groß zu sein wie die von Quadrat A.

Berechne deren genaue Länge.

Betrachte diese Familie von Quadraten.

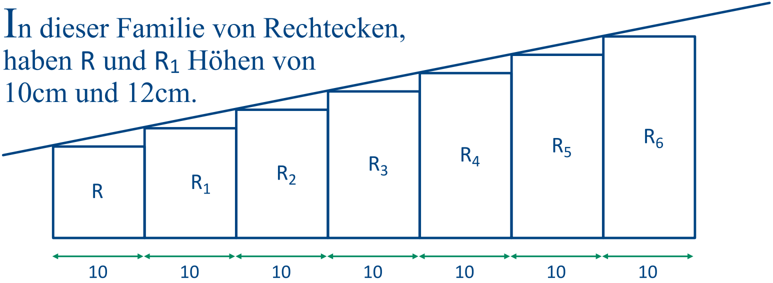


Das Quadrat A_{12} hat fast genau 9 mal so lange Seiten wie A.

Danny denkt, dass die Seiten von A_6 daher etwa 4,5 mal so lang sein werden. Ellie meint, sie sind etwa 3 mal so lang.

Hat einer von beiden recht? Erkläre deine Antwort.

In dieser Familie von Rechtecken, haben R und R_1 Höhen von 10cm und 12cm.



Denke an weitere Rechtecken in dieser Familie (R_7, R_8, R_9 usw.).

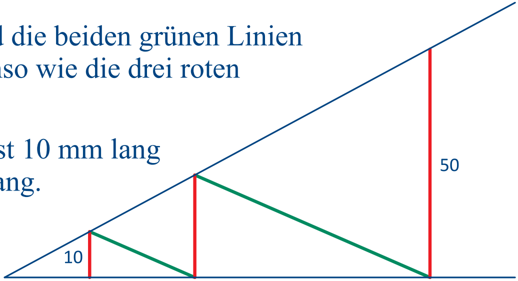
Welches Rechteck ist

a) doppelt so hoch wie R

b) 9 mal so hoch wie R?

In dieser Abbildung sind die beiden grünen Linien parallel zueinander, ebenso wie die drei roten Linien.

Die kürzeste rote Linie ist 10 mm lang und die längste 50 mm lang.

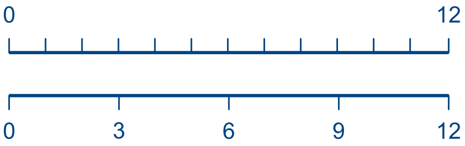


a) Schätze die Länge der mittleren roten Linie.

b) Finde einen Weg, diese Länge zu berechnen.

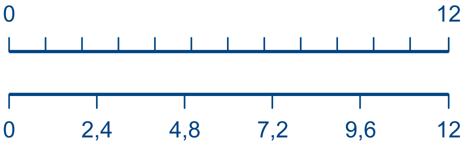
Quentin zeichnet diesen doppelten Zahlenstrahl, um die Division 12 : 3 darzustellen.

Wie kann er den verwenden, um die Antwort zu bekommen?



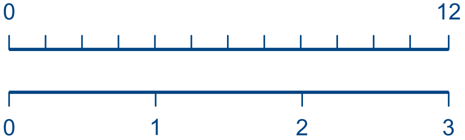
Er zeichnet diesen doppelten Zahlenstrahl für die Division 12 : 2,4.

Wie kann er den verwenden, um die Antwort zu bekommen?



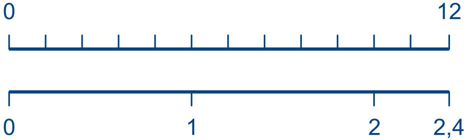
Parin zeichnet diesen doppelten Zahlenstrahl, um die Division 12 : 3 darzustellen.

Wie kann sie den verwenden, um die Antwort zu bekommen?



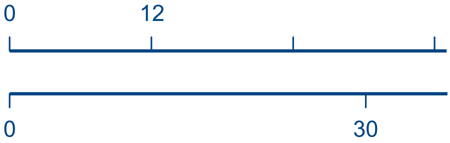
Sie zeichnet diesen doppelten Zahlenstrahl für die Division 12 : 2,4.

Wie kann sie den verwenden, um die Antwort zu bekommen?



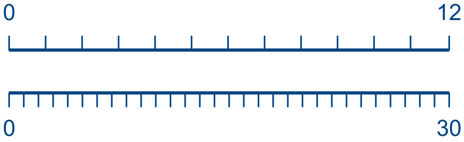
Quentin skizziert diesen doppelten Zahlenstrahl für die Division 12 : 30.

Wie kann er den verwenden, um die Antwort abzuschätzen?



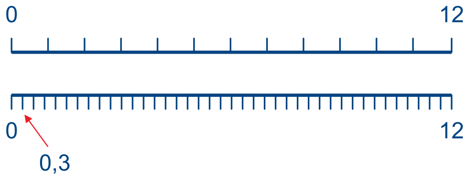
Parin skizziert diesen doppelten Zahlenstrahl für die Division 12 : 30.

Wie kann sie den verwenden, um die Antwort abzuschätzen?



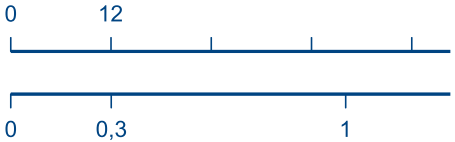
Quentin skizziert diesen doppelten Zahlenstrahl für die Division 12 : 0,3.

Wie kann er den verwenden, um die Antwort abzuschätzen?



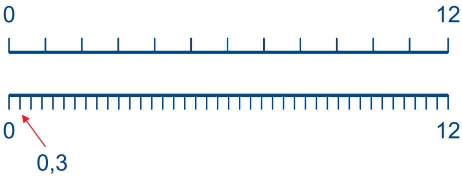
Parin skizziert diesen doppelten Zahlenstrahl für die Division 12 : 0,3.

Wie kann sie den verwenden, um die Antwort abzuschätzen?



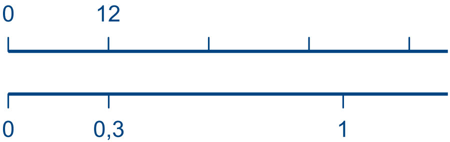
Quentin skizziert diesen doppelten Zahlenstrahl für $12 \div 0{,}3$.

Fertige eine ähnliche Skizze für $6 : 0{,}4$ an. Erkläre, wie es bestätigt, dass $6 : 0{,}4 = 15$.



Parin skizziert diesen doppelten Zahlenstrahl für $12 \div 0{,}3$.

Fertige eine ähnliche Skizze für $6 : 0{,}4$ an. Erkläre, wie es bestätigt, dass $6 : 0{,}4 = 15$.

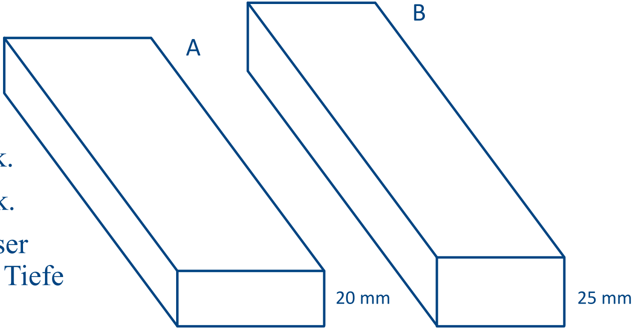


Die Bretter A und B sind aus dem gleichen Holz.

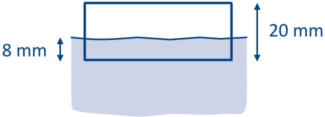
Brett A ist 20 mm dick.

Brett B ist 25 mm dick.

Wenn Brett A im Wasser liegt, sinkt es auf eine Tiefe von 8 mm.

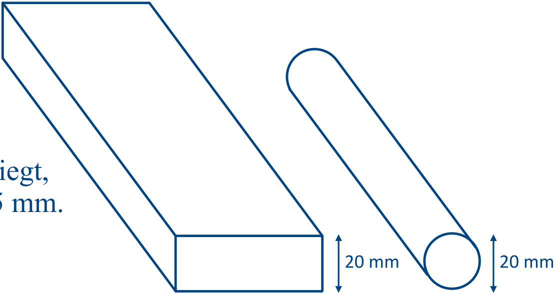


Wie tief sinkt Brett B?

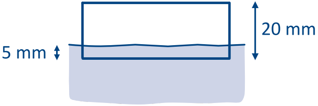


Ein Brett und eine runde Stange sind aus dem gleichen Holz.

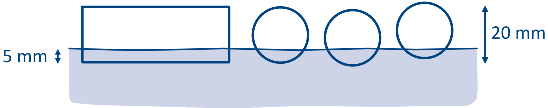
Beide sind 20 mm dick.



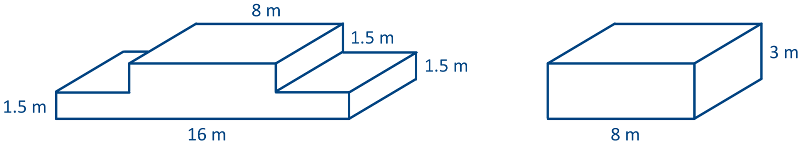
Wenn das Brett im Wasser liegt, sinkt es auf eine Tiefe von 5 mm.



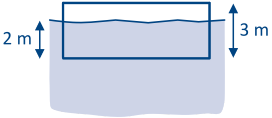
Wenn die Stange auch im Wasser liegt, sinkt sie genauso tief, oder tiefer, oder nicht so tief?



Betrachte diese beiden hölzernen „Boote“.



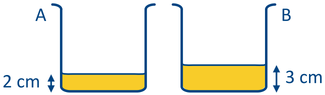
Wenn das rechte Boot im Wasser liegt, sinkt es auf eine Tiefe von 2 m.



Wie tief sinkt das andere Boot?

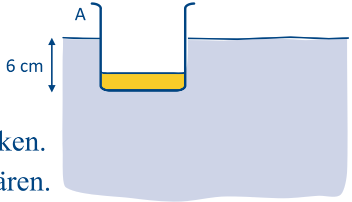
Die Abbildung zeigt identische Bechergläser:

Sie sind beide mit Sand gefüllt, zu einer Höhe von 2 cm für Becher A und 3 cm für Becher B.



Die Becher werden in Wasser gestellt.

Becher A sinkt zu einer Tiefe von 6 cm.

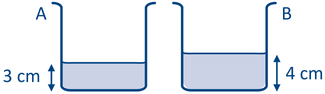


Tracy sagt, B wird zu einer Tiefe von 9 cm sinken.

Hat sie recht? Versuche ihr Vermutung zu erklären.

Die Abbildung zeigt identische Bechergläser:

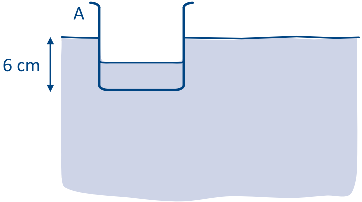
Sie sind beide mit Wasser gefüllt, zu einer Höhe von 3 cm für Becher A und 4 cm für Becher B.



Die Becher werden in Wasser gestellt.

Becher A sinkt zu einer Tiefe von 6 cm.

Wie tief sinkt Becher B?



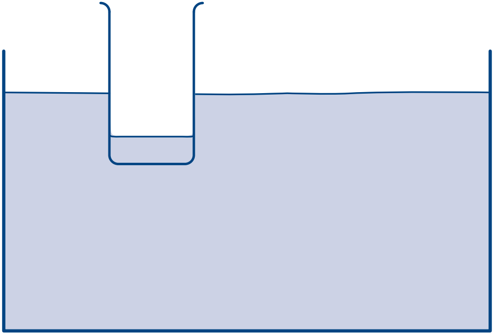
Ein Glaszylinder mit etwas Wasser am Boden schwimmt in einem Fischbecken.

Eine Tasse Wasser wird aus dem Becken genommen und in den Zylinder gegossen.

Der Zylinder schwimmt noch.

Was ist mit dem Wasserstand im Becken passiert?

Ist er gefallen, gestiegen oder gleich geblieben?



Diese deutsche Ausgabe von SLIDES wird für den nicht-kommerziellen Gebrauch durch deutschsprachige Lehrkräfte und Schulkinder frei zur Verfügung gestellt.

Autor: Dietmar Küchemann
Übersetzung: Dietmar Küchemann und Sabine Prüfer

Herausgeber: Dietmar Küchemann - mietmau@gmail.com

Die originale pdf-Datei von englischen SLIDES wird mit dem Buch MultipliXing geliefert und darf nicht gedruckt, kopiert oder weiterverbreitet werden.

Herausgeber: ATM - admin@atm.org.uk

MultipliXing©
Grazing in the multiplicative conceptual field