



SACHSEN-ANHALT

Ministerium für Bildung

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2026

MATHEMATIK (ERHÖHTES ANFORDERUNGSNIVEAU)

Prüfungsaufgabe Prüfungsteil 2

spätester Zeitpunkt der Abgabe: 300 Minuten nach Prüfungsbeginn

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind Zeichengeräte, Kurvenschablonen, ein Wörterbuch der deutschen Rechtschreibung, die „Mathematisch-naturwissenschaftliche Formelsammlung“ sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner zugelassen.

Es sind die drei Pflichtaufgaben zu bearbeiten.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Aufgabe 3: Stochastik

Name, Vorname: _____

Aufgabe 1: Analysis

1.1

BE

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + ax^2 + ax + \frac{1}{4}$ mit $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Abbildung 1 zeigt G_a für $a = 0$.

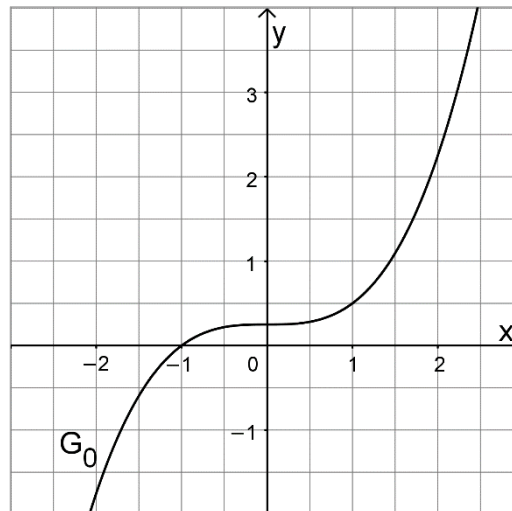


Abbildung 1

- | | |
|---|---|
| a) Berechnen Sie denjenigen Wert von a , für den der Punkt $(1 -1)$ auf G_a liegt, und zeigen Sie, dass dieser Punkt Wendepunkt dieses Graphen ist. | 5 |
| b) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Graphen der Schar verlaufen, und bestimmen Sie die Koordinaten dieser beiden Punkte. | 4 |
| c) Der Term einer Funktion der Schar kann in der Form $\frac{1}{4} \cdot (x+1)^3$ angegeben werden. Der Graph dieser Funktion kann durch Verschiebungen aus G_0 erzeugt werden. Geben Sie eine passende Möglichkeit an. | 2 |
| d) Betrachtet werden für jeden Wert $u > 0$ die Tangente t_u an G_0 im Punkt $P_u(u f_0(u))$ sowie der Punkt $Q_u(u 0)$. Die Tangente t_u schneidet die x -Achse in einem Punkt, der mit T_u bezeichnet wird. Begründen Sie mithilfe von geeigneten Eintragungen in Abbildung 1, dass $ \overline{T_u Q_u} = \frac{f_0(u)}{f'_0(u)}$ für jeden Wert $u > 0$ gilt. | 4 |
| e) Es gibt Kreise, deren Mittelpunkte auf der y -Achse liegen und die den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f_0 in genau zwei Punkten berühren. Der Punkt $A(1 \frac{3}{4})$ ist ein Berührungspunkt eines solchen Kreises. Bestimmen Sie rechnerisch die y -Koordinate des Mittelpunktes dieses Kreises. | 5 |

Fortsetzung auf Seite 3

1.2

Betrachtet wird eine Wasserfontäne, bei der das Wasser aus einer Düse austritt. Die sich periodisch ändernde momentane Durchflussrate des Wassers an der Düse beeinflusst das Erscheinungsbild der Fontäne.

Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h: x \mapsto -\frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1$ beschreibt im Folgenden für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an der Düse. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $h(x)$ die momentane Durchflussrate in Litern pro Sekunde. In Abbildung 2 ist der Graph von h dargestellt.

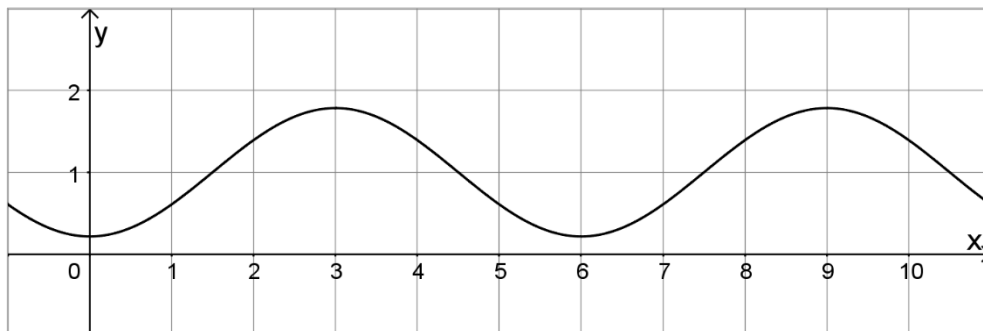


Abbildung 2

- a) Bestimmen Sie, wie oft die momentane Durchflussrate in der ersten Minute nach Beobachtungsbeginn ihren Maximalwert annimmt, und geben Sie einen Zeitpunkt an, zu dem die momentane Durchflussrate am stärksten zunimmt. 3
- b) Berechnen Sie $\int_5^9 h(x) dx$ und interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang. 4
- c) Betrachtet wird nun eine andere Düse, bei der sich die momentane Durchflussrate ebenfalls periodisch mit der Zeit ändert. Die maximale momentane Durchflussrate beträgt 2 Liter pro Sekunde und die Zeitspanne zwischen zwei aufeinanderfolgenden Maximalwerten der momentanen Durchflussrate ist 1,5-mal so groß wie bei der zuerst betrachteten Düse. Skizzieren Sie dazu passend in Abbildung 2 einen Graphen, der für $x \geq 0$ eine mögliche zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers für die nun betrachtete Düse beschreibt. 3

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

BE

Abbildung 1 zeigt den Körper ABCDEF mit den Eckpunkten $A(2|0|-0,5)$, $B(3|5|-0,5)$, $C(-3|5|-0,5)$, $D(-2|0|-0,5)$, $E(2|5|1)$ und $F(-2|5|1)$. Dieser stellt modellhaft eine aus dem Wasser ragende Sprungschanze für Wasserski dar. Das Viereck AEFD beschreibt den sogenannten Schanzentisch, die xy-Ebene stellt die Wasseroberfläche dar. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.

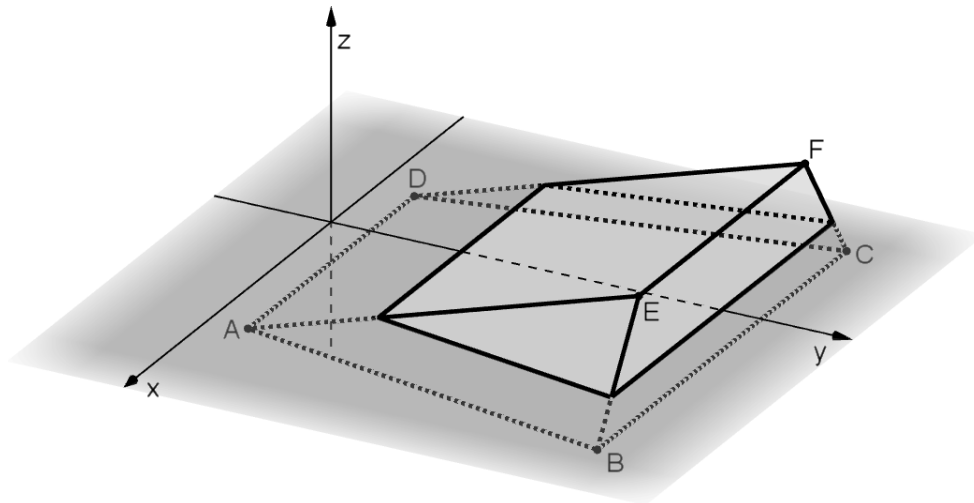


Abbildung 1

- Das Viereck AEFD ist ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass es auch ein Rechteck ist. 2
- Begründen Sie, dass die yz-Ebene eine Symmetrieebene des Körpers ABCDEF ist. 2
- Für eine reelle Zahl k ist der Vektor $\begin{pmatrix} k \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor der Ebene, in der das Rechteck AEFD liegt. Begründen Sie ohne Rechnung, dass $k = 0$ ist. 2
- Bestimmen Sie die Größe des Winkels, unter dem der Schanzentisch gegenüber der Wasseroberfläche geneigt ist. 3
- Der Teil des Schanzentischs, der sich oberhalb der Wasseroberfläche befindet, soll als Werbefläche genutzt werden. Die folgende Aussage stellt den ersten Schritt der Bestimmung des Flächeninhalts dieser Werbefläche dar:
 Mit $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -0,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $r = \frac{1}{3}$.
 Geben Sie die Bedeutung dieses Wertes $\frac{1}{3}$ für r im Sachzusammenhang an und berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Werbefläche. 4

Fortsetzung auf Seite 5

Ein Wasserskifahrer fährt den Schanzentisch geradlinig hinauf, bis er die Kante erreicht, die im Modell der Strecke $\overline{EF}$ entspricht. Der anschließende Sprung beginnt an dieser Kante und endet auf der Wasseroberfläche. Insgesamt legen die Füße des Wasserskifahrers einen Weg zurück, der im Modell als Kurve in einer Ebene beschrieben werden kann, die senkrecht zur xy -Ebene liegt und mit L bezeichnet wird. Die Ebene L kann durch die Gleichung $10x - 3y = 0$ dargestellt werden. Die Orte des Absprungs und des Auftreffens auf der Wasseroberfläche werden im Modell durch die Punkte V bzw. W beschrieben.

In Abbildung 2 ist diese Kurve in der Ebene L dargestellt.

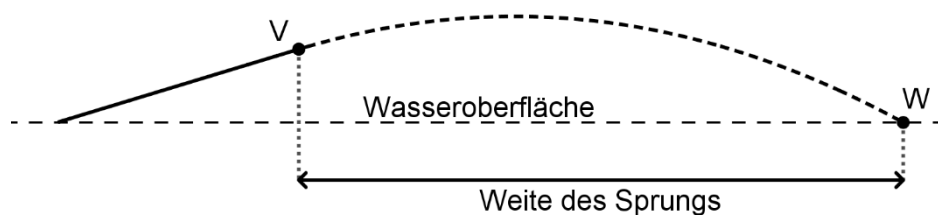


Abbildung 2

- f) Beurteilen Sie, ob der Wasserskifahrer so über den Schanzentisch fährt, dass sein Weg im Modell in der Symmetrieebene des Körpers $ABCDEF$ verläuft.
- g) Im gegebenen Koordinatensystem wird der beschriebene Weg beim Sprung durch die Punkte $(0, 3a \mid a \mid -0,05 \cdot (a - 2,61) \cdot (a - 13,39))$ mit geeigneten Werten von a dargestellt. Von Interesse ist die Weite des Sprungs, die in Abbildung 2 veranschaulicht ist. Bestimmen Sie die Weite des Sprungs auf zehntel Meter genau.

2

5

Aufgabe 3: Stochastik

3.1

BE

Bei einer statistischen Erhebung werden die in einem großen europäischen Land zugelassenen Kraftfahrzeuge betrachtet. Von diesen Kraftfahrzeugen sind 80 % Personenkraftwagen (Pkw).

- a) Es werden 200 Kraftfahrzeuge zufällig ausgewählt. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich darunter höchstens 170 Pkw befinden.

2

Im Folgenden wird zusätzlich das Alter der betrachteten Kraftfahrzeuge untersucht. 70,8 % dieser Kraftfahrzeuge sind mindestens fünf Jahre alt.

- b) Vervollständigen Sie die abgebildete Vierfeldertafel.

2

	A	$\bar{A}$	
B			
$\bar{B}$		0,044	
			1

A: „Ein Kraftfahrzeug ist mindestens fünf Jahre alt.“

B: „Ein Kraftfahrzeug ist ein Pkw.“

- c) Untersuchen Sie, ob der Anteil der Kraftfahrzeuge, die mindestens fünf Jahre alt sind, unter den Pkw größer ist als unter den übrigen Kraftfahrzeugen.

3

In der Folge werden die zugelassenen Pkw betrachtet. Diese werden je nach Alter einem von sieben Zeitintervallen zugeordnet. Abbildung 1 zeigt die entsprechenden Anteile.

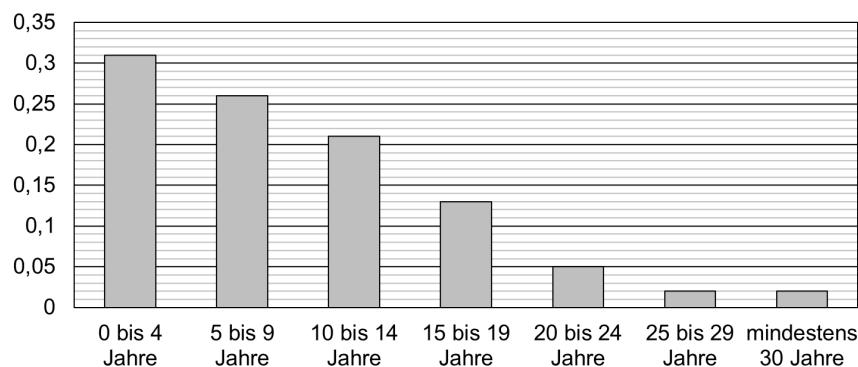


Abbildung 1

- d) Alle zugelassenen Pkw werden nach ihrem Alter in einer Liste sortiert. Angenommen, es gibt einen Pkw, für den die Anzahl jüngerer Pkw gleich der Anzahl älterer Pkw ist. Geben Sie dasjenige der sieben Zeitintervalle an, in dem das Alter dieses Pkw liegt, und begründen Sie Ihre Angabe.

2

- e) Beschreiben Sie den mathematischen Zusammenhang zwischen Abbildung 1 und dem Term $5 \cdot 0,26 + 10 \cdot 0,21 + 15 \cdot 0,13 + 20 \cdot 0,05 + 25 \cdot 0,02 + 30 \cdot 0,02$ und geben Sie die Bedeutung seines Wertes im Sachzusammenhang an.

3

Fortsetzung auf Seite 7

3.2

In einer Region werden die Personen betrachtet, die regelmäßig in einem Pkw zur Arbeit fahren. Um den Anteil p der Personen zu senken, die dabei allein im Pkw sind, wurden Anreize geschaffen, verstärkt Fahrgemeinschaften zu bilden. Erfahrungsgemäß betrug der beschriebene Anteil p vor der Schaffung der Anreize über 90 %. Nun soll untersucht werden, ob dieser Anteil deutlich gesunken ist. Dazu werden 20 Stichproben jeweils vom Umfang 500 erhoben und es wird jeweils die Anzahl der Personen ermittelt, die allein im Pkw zur Arbeit fahren.

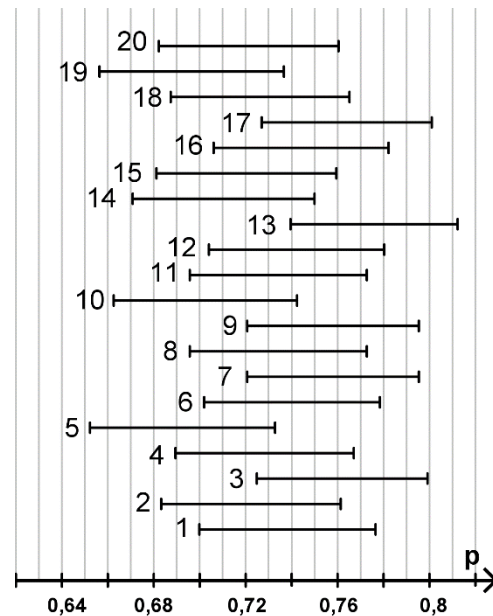


Abbildung 2

Für jede Stichprobe wird mithilfe der Gleichung $|h - p| = 1,96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$ jeweils ein Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % für den unbekannten Anteil p ermittelt. Diese Konfidenzintervalle sind in Abbildung 2 dargestellt und mit den Nummern 1 bis 20 versehen.

- Die obere Grenze eines der ermittelten Konfidenzintervalle beträgt etwa 0,75. Geben Sie die Nummer dieses Konfidenzintervalls an und bestimmen Sie für die zugrunde liegende Stichprobe einen passenden Wert für die Anzahl der Personen, die allein im Pkw zur Arbeit fahren. 3
- Geben Sie einen möglichen Wert für den beschriebenen unbekannten Anteil p an, der mit genau 19 der 20 Stichprobenergebnisse verträglich ist, und begründen Sie Ihre Angabe unter Verwendung von Abbildung 2. 2
- Nun werden für 20 weitere Stichproben, die jeweils den Umfang 500 haben, die zu deren Ergebnissen gehörenden Konfidenzintervalle zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % ermittelt. Es wird angenommen, dass der Wert von p für diese 20 Stichproben konstant ist. Betrachtet wird die folgende Aussage: 3

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert von p von genau 19 dieser 20 ermittelten Konfidenzintervalle überdeckt wird, beträgt weniger als 42 %.

Die Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl derjenigen Konfidenzintervalle unter den ermittelten Konfidenzintervallen, die den Wert von p überdecken. Geben Sie eine geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y an und erläutern Sie Ihre Wahl. Zeigen Sie, dass die Aussage wahr ist.