



SACHSEN-ANHALT

Ministerium für Bildung

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2025

MATHEMATIK (ERHÖHTES ANFORDERUNGSNIVEAU)

Prüfungsaufgabe Prüfungsteil 2

spätester Zeitpunkt der Abgabe: 300 Minuten nach Prüfungsbeginn

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind Zeichengeräte, Kurvenschablonen, ein Wörterbuch, das der amtlichen Regelung der deutschen Rechtschreibung vollständig entspricht, das „Dokument mit mathematischen Formeln“ als einziges Formeldokument sowie ein wissenschaftlicher Taschenrechner zugelassen.

Es sind die drei Pflichtaufgaben zu bearbeiten.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Aufgabe 3: Stochastik

Name, Vorname: _____

Aufgabe 1: Analysis

1.1

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$f_a : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - ax + 2a \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

Abbildung 1 zeigt einen Graphen der Schar.

- a) Der abgebildete Graph verläuft durch den Punkt $(0 | 4)$. Begründen Sie, dass es sich um den Graphen von f_2 handelt.
- b) Zeigen Sie rechnerisch, dass jeder Graph der Schar genau einen Wendepunkt besitzt, und geben Sie dessen Koordinaten an.
- c) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den $\int_0^2 f_a(x) dx = 0$ gilt.

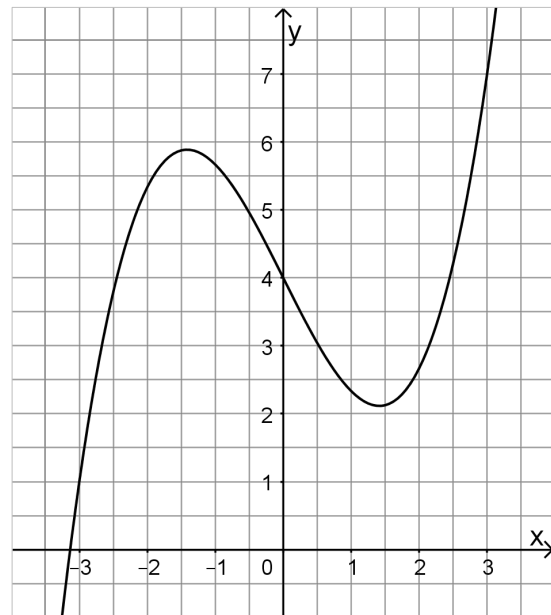


Abbildung 1

Betrachtet wird im Folgenden die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 2x + 4$.

Die Funktion f entspricht der Funktion f_2 der Schar, Abbildung 1 zeigt somit den Graphen G_f von f . Dieser ist symmetrisch bezüglich des Punkts $(0 | 4)$.

Die Tangente an G_f im Punkt $P(3 | f(3))$ wird mit t bezeichnet; $y = 7x - 14$ ist eine Gleichung von t .

- d) Zeigen Sie rechnerisch anhand geeigneter Termumformungen, dass $f(x) - (7x - 14) = \frac{1}{3} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 6)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Begründen Sie mithilfe dieses Zusammenhangs, dass t und G_f neben P genau einen weiteren gemeinsamen Punkt besitzen.

- e) Betrachtet wird die Gleichung $\int_k^{k+1} f(x) dx = 4$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Für $-1,5 \leq k \leq 1,5$ besitzt diese Gleichung genau eine Lösung.

Untersuchen Sie grafisch mithilfe von Abbildung 1, wie viele Lösungen diese Gleichung für $k \geq 1,5$ besitzt.

BE

2

5

4

6

4

Fortsetzung auf Seite 3

1.2

Die Länge einer Fahrstrecke, die ein Elektroauto mit vollständig geladener Batterie ohne erneutes Aufladen unter bestimmten Bedingungen zurücklegen kann, wird als Nennreichweite des Elektroautos bezeichnet und ist für jedes Elektroauto ein fester Wert. Die tatsächliche Reichweite hängt von vielen Faktoren ab; im Folgenden wird ausschließlich die Abhängigkeit von der Außentemperatur betrachtet.

Diese Abhängigkeit kann für eine Vielzahl von Elektroautos modellhaft im Intervall $[-12; 36]$ durch eine Funktion r beschrieben werden. Dabei ist x die Außentemperatur in $^{\circ}\text{C}$ und $r(x)$ der Quotient aus der tatsächlichen Reichweite eines Elektroautos und dessen Nennreichweite. Abbildung 2 zeigt den Graphen der Funktion r .

Hat also r beispielsweise für eine bestimmte Außentemperatur den Wert $0,6$, so beträgt die tatsächliche Reichweite eines Elektroautos bei dieser Außentemperatur 60 % seiner Nennreichweite.

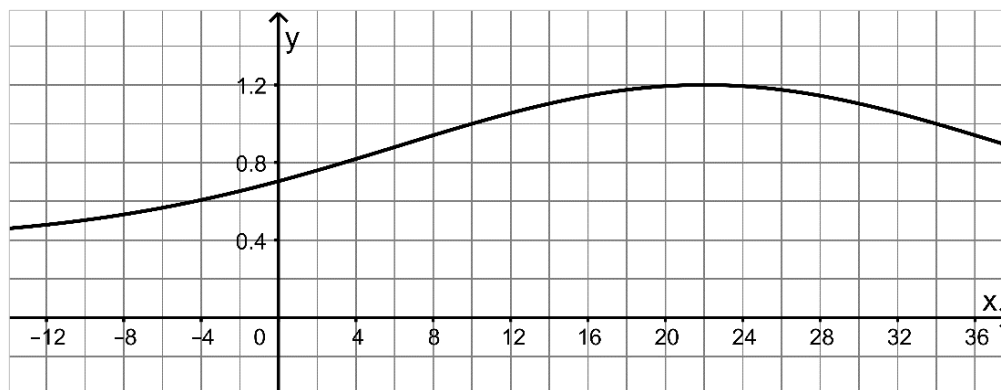


Abbildung 2

Im Folgenden werden nur Temperaturen im Bereich von -12°C bis 36°C sowie Elektroautos betrachtet, bei denen der durch die Funktion r beschriebene Zusammenhang gilt.

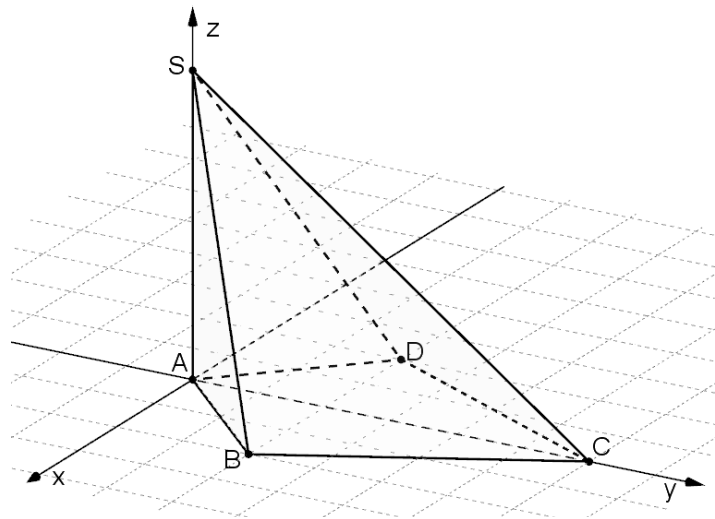
- Geben Sie anhand von Abbildung 2 die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von r an. Beschreiben Sie die Bedeutung des Hochpunkts und seiner Koordinaten im Sachzusammenhang.
- Die Nennreichweite eines Elektroautos A beträgt 320 km, die Nennreichweite eines Elektroautos B beträgt 500 km. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 eine Außentemperatur, bei der das Elektroauto A dieselbe tatsächliche Reichweite besitzt wie das Elektroauto B bei einer Außentemperatur von 0°C .

4

5

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Die Abbildung zeigt die Pyramide ABCDS. Ihre Grundfläche ABCD ist ein Drachenviereck mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|6|0)$ und $D(-2|2|0)$. Die Spitze der Pyramide ist der Punkt $S(0|0|6)$.



- a) Berechnen Sie die Länge der kürzesten der acht Kanten sowie das Volumen der Pyramide ABCDS.

BE

4

Die Seitenfläche BCS der Pyramide liegt in der Ebene E.

- b) Betrachtet werden die Vektoren $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, deren Koordinaten nicht alle gleich null sind.

3

Begründen Sie, dass ein solcher Vektor, für den $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

gilt, ein Normalenvektor von E ist.

- c) Die Ebene E hat die Gleichung $2x + y + z = 6$. Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den E mit der xy-Ebene einschließt.

3

Gegeben ist die Schar der Ebenen $F_k: k \cdot y + (k-2) \cdot z = 2k$ mit $k \in]0;3[$.

Jede Ebene F_k der Schar schneidet die Pyramide ABCDS in einem Dreieck BDQ_k , wobei der Punkt Q_k auf der Strecke $\overline{SC}$ liegt.

- d) Geben Sie eine Gleichung der Ebene F_2 an und zeichnen Sie in die Abbildung die Schnittfigur von F_2 mit der Pyramide ABCDS ein.

4

- e) Es gibt einen Wert von k, für den der Flächeninhalt des Dreiecks BDQ_k minimal ist. Ermitteln Sie diesen Wert.

6

Aufgabe 3: Stochastik

	BE
Unter den Touristen eines Naturparks nutzen erfahrungsgemäß 14 % das Fahrrad für Ausflüge vor Ort. Im Folgenden werden diese Touristen als Radausflügler bezeichnet. Es soll davon ausgegangen werden, dass in einer zufälligen Auswahl von Touristen des Naturparks die Anzahl der Radausflügler binomialverteilt ist.	
3.1	
Für eine Stichprobe werden 300 Touristen des Naturparks zufällig ausgewählt.	
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich in der Stichprobe genau 36 Radausflügler befinden.	1
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Radausflügler in der Stichprobe um mindestens 10 % größer ist als der Erwartungswert für diese Anzahl.	3
3.2	
Um den Naturpark als Reiseziel attraktiver zu machen, setzt der dortige Tourismusverband Shuttlebusse ein. Die Fahrkarten für diese Busse können ausschließlich online gebucht werden und sind jeweils für einen bestimmten Tag gültig. Erfahrungsgemäß werden 80 % aller gebuchten Fahrkarten spätestens am Vortag der Fahrt gebucht. Von diesen spätestens am Vortag gebuchten Fahrkarten werden 90 % auch tatsächlich genutzt. Bei den restlichen, erst am Tag der Fahrt gebuchten Fahrkarten liegt dieser Anteil mit 95 % etwas höher.	
a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.	3
b) Betrachtet wird eine zufällig ausgewählte, nicht genutzte Fahrkarte. Beurteilen Sie die folgende Aussage:	3
<i>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Fahrkarte spätestens am Vortag gebucht wurde, ist achtmal so groß wie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie erst am Tag der Fahrt gebucht wurde.</i>	

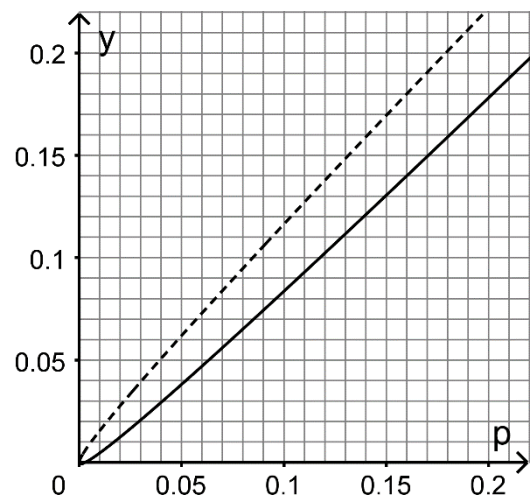
Fortsetzung auf Seite 6

Der Tourismusverband vermutet, dass der Anteil der Radausflügler unter allen Touristen durch den Einsatz der Shuttlebusse nun 20 % beträgt.

Um bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 90 % einen Schätzwert für den Anteil der Radausflügler unter den Touristen zu ermitteln, wird eine Stichprobe von 900 zufällig ausgewählten Touristen betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen der folgenden für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$g_1 : p \mapsto p - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{900}}$$

$$g_2 : p \mapsto p + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{900}}$$



- c) In der Stichprobe werden 153 Radausflügler gezählt. Ermitteln Sie grafisch das zu dieser Anzahl gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 % und beurteilen Sie damit, ob die Vermutung des Tourismusverbandes mit dem Stichprobenergebnis verträglich ist.

5

- d) Betrachtet wird eine Stichprobe vom Umfang n mit einem Anteil $h = 0,17$ sowie das zu diesem Anteil gehörende Konfidenzintervall zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %. Betrachtet wird die folgende Aussage:

5

Der Wert 0,17 liegt in der Mitte zwischen 0,14 und 0,20. Trotzdem ist es möglich, dass die Annahme $p = 0,14$ mit dem Stichprobenergebnis nicht verträglich ist, die Annahme $p = 0,20$ hingegen schon.

Beurteilen Sie diese Aussage unter Verwendung der folgenden beiden Rechnungen:

$$\text{I: } 0,17 = 0,14 + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,14 \cdot 0,86}{n}}$$

$$\Rightarrow n \approx 359,8$$

$$\text{II: } 0,17 = 0,20 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{n}}$$

$$\Rightarrow n \approx 478,2$$