SACHSEN-ANHALT

Ministerium für Bildung

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2024

MATHEMATIK
(GRUNDLEGENDES ANFORDERUNGSNIVEAU)

Prüfungsaufgabe
Prüfungsteil 2

Arbeitszeit: 165 Minuten

Es sind die drei Pflichtaufgaben zu bearbeiten.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Aufgabe 3: Stochastik

Name, Vorname: ______________________

Aufgabe 1: Analysis

1.1 **BE**

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = \frac{3}{1000} \cdot x^4 - \frac{8}{100} \cdot x^3 + \frac{6}{10} \cdot x^2$.

Abbildung 1 zeigt den Graphen von f sowie den Punkt $P\left(0 \mid -\frac{5}{8}\right)$.

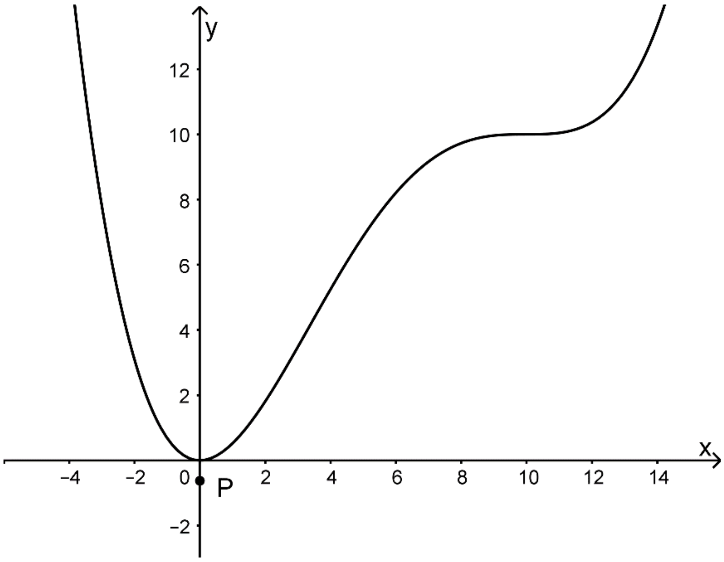

Abbildung 1

a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen von f an. Zeigen Sie rechnerisch, dass der Graph von f keine weiteren Extrempunkte besitzt. 6

Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(5 \mid f(5))$ wird mit t bezeichnet.

b) Ermitteln Sie eine Gleichung von t. 4

c) Skizzieren Sie in Abbildung 1 zwei von t verschiedene Tangenten an den Graphen von f, die die y-Achse im Punkt P schneiden und deren Steigungen unterschiedliche Vorzeichen haben. 3

d) Der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g kann aus dem Graphen von f erzeugt werden. Der Punkt $(12 \mid 12)$ des Graphen von g wird dabei aus dem Punkt $(10 \mid 10)$ des Graphen von f erzeugt und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$.
Geben Sie in diesem Zusammenhang die Bedeutung von a und b an und berechnen Sie die Werte von a und b. 4

Fortsetzung auf Seite 3

1.2

Zwei Radfahrer starten gleichzeitig nebeneinander auf einer geradlinigen Bahn aus einer Ruheposition. Radfahrer A beschleunigt 10 Sekunden lang und fährt danach mit konstanter Geschwindigkeit weiter. Radfahrer B beschleunigt 12 Sekunden lang und fährt dann mit konstanter Geschwindigkeit weiter.
Abbildung 2 stellt die Geschwindigkeitsverläufe der beiden Radfahrer in den ersten 15 Sekunden nach dem Start dar.

Dabei wird der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer A in den ersten 10 Sekunden nach dem Start durch die Funktion f aus Aufgabe 1.1 beschrieben. Der Geschwindigkeitsverlauf von Radfahrer B wird in den ersten 12 Sekunden nach dem Start durch eine Funktion h beschrieben. Dabei ist x die seit dem Start vergangene Zeit in Sekunden und $f(x)$ bzw. $h(x)$ die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde.

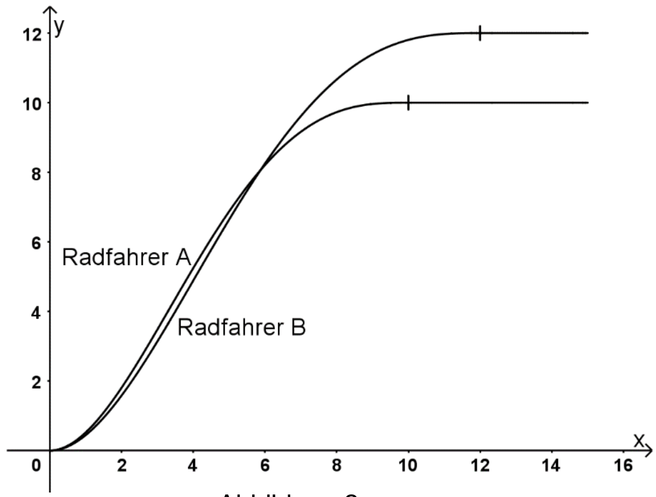

Abbildung 2

a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit von Radfahrer A drei Sekunden nach dem Start. 2

Nach dem Start gibt es genau einen Zeitpunkt, zu dem die Geschwindigkeiten beider Radfahrer gleich groß sind. Im Modell wird dieser Zeitpunkt mit x_s bezeichnet.

b) Ermitteln Sie x_s mithilfe von Abbildung 2 und geben Sie den Zeitraum an, in dem die Geschwindigkeit von Radfahrer A größer ist als die Geschwindigkeit von Radfahrer B. 3

c) Im Folgenden ist ein Lösungsweg für eine Aufgabe im gegebenen Sachzusammenhang dargestellt: 4

$d(x) = f(x) - h(x)$

$d'(x) = 0$ hat für $0 < x < x_s$ nur die Lösung $x_1 \approx 3{,}64$.

$d''(x_1) \approx -0{,}13 < 0$

$d(x_1) \approx 0{,}37$

Geben Sie die Bedeutung von $d(x)$ für $0 < x < x_s$ im Sachzusammenhang an und interpretieren Sie das Ergebnis 0,37.

d) Berechnen Sie die Länge der Strecke, die Radfahrer A in den ersten 15 Sekunden nach dem Start zurücklegt. 6

e) Es gibt ein z mit $0 < z < 10$, für das gilt: $\int_0^z \left(f(x) - h(x)\right)dx = 0$ 3

Geben Sie die Bedeutung von z im Sachzusammenhang an und begründen Sie im Sachzusammenhang, dass $z > x_s$ gilt.

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

BE

Gegeben sind das gerade Prisma ABCDEF mit den Eckpunkten $C(0|0|0)$, $D(6|0|5)$, $E(0|8|5)$ und $F(0|0|5)$ sowie der Punkt $M(3|4|5)$ (siehe Abbildung 1).

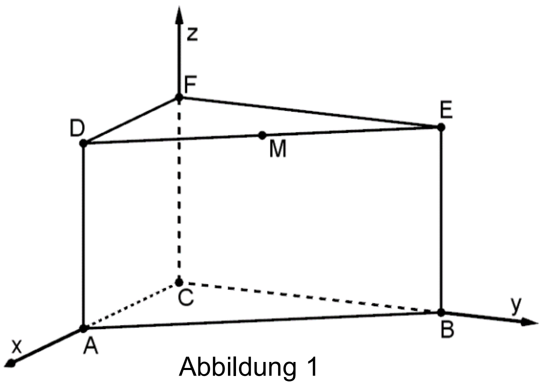

Abbildung 1

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Prismas. 4

b) Begründen Sie, dass die Punkte D, E und F auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen. 3

c) Die Ebene W enthält die Punkte M, F und $S(7{,}5|0|0)$ (siehe Abbildung 2). Bestimmen Sie eine Gleichung von W in Koordinatenform. 4

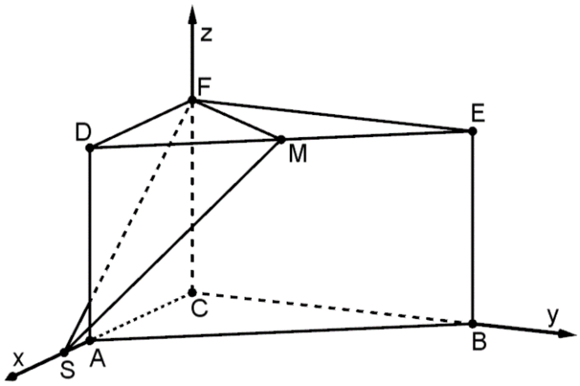

Abbildung 2

[zur Kontrolle: $4x - 3y + 6z = 30$]

d) Im Folgenden sind zwei Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten steht: 2

(1) $P(6|0|r)$ mit $0 \le r \le 5$

(2) $4 \cdot 6 - 3 \cdot 0 + 6 \cdot r = 30$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

Anstelle des Punkts S werden nun Punkte $S_t(t|0|0)$ mit $t \ge 0$ auf der x-Achse betrachtet. Für jeden Wert von t schneidet die Ebene durch die Punkte M, F und S_t das Prisma ABCDEF in einem Vieleck.

e) Geben Sie die Anzahl der Ecken des Vielecks in Abhängigkeit von t an sowie alle Werte von t, für die das Vieleck zwei Symmetrieachsen besitzt. 4

f) Bestimmen Sie denjenigen Wert von t, für den das Dreieck MFS_t im Punkt M rechtwinklig ist. 3

Aufgabe 3: Stochastik

3.1 **BE**

Eine umfassende Studie zu den Arbeits- und Lebensbedingungen von Studierenden einer Universität ergab, dass 56 % der Studierenden einen Laptop und 33 % einen Desktop-PC besitzen. 72 % der Studierenden haben mindestens eines dieser beiden Endgeräte.

Unter den Studierenden der Universität wird eine Person zufällig ausgewählt und zum Besitz von digitalen Endgeräten befragt. Folgende Ereignisse werden betrachtet:

L: „Die Person besitzt einen Laptop."
D: „Die Person besitzt einen Desktop-PC."

a) Zeigen Sie, dass $P\left(\overline{L} \cap \overline{D}\right) = 0{,}28$ gilt, und geben Sie das zugrundeliegende Ereignis im Sachzusammenhang an. 3

b) Stellen Sie den Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass die zufällig ausgewählte Person zwar einen Laptop, jedoch keinen Desktop-PC besitzt. 4

c) Nun wird unter allen Befragten, die einen Desktop-PC haben, eine Person zufällig ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese einen Laptop besitzt. 2

3.2

In derselben Studie wurde auch festgestellt, dass 68 % der Besitzer von Laptops und Desktop-PCs bei einem Software-Problem versuchen, dieses selbstständig zu lösen. Unter den Besitzern dieser Endgeräte werden 900 Personen zufällig ausgewählt. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl derjenigen unter diesen 900 Personen, die versuchen, ein Software-Problem selbstständig zu lösen. Dabei wird X als binomialverteilt angenommen.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens 70 % dieser 900 Personen bei einem Software-Problem versuchen, dieses selbstständig zu lösen. 2

b) Berechnen Sie den Erwartungswert μ von X und ermitteln Sie die kleinste mögliche natürliche Zahl k, sodass $P(\mu - k \le X \le \mu) \ge 30\ \%$ gilt. 4

3.3

Für binomialverteilte Zufallsgrößen mit den Parametern $n = 15000$ und p ist in der Abbildung die Standardabweichung σ in Abhängigkeit von p dargestellt. 5

Ergänzen Sie im dargestellten Koordinatensystem die Skalierungen der Achsen und erläutern Sie Ihr Vorgehen.