SACHSEN-ANHALT

Ministerium für Bildung

# SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2024

## MATHEMATIK
## (ERHÖHTES ANFORDERUNGSNIVEAU)

## Prüfungsaufgabe
## Prüfungsteil 2

---

Arbeitszeit: 200 Minuten

---

Es sind die drei Pflichtaufgaben zu bearbeiten.

**Pflichtaufgaben**

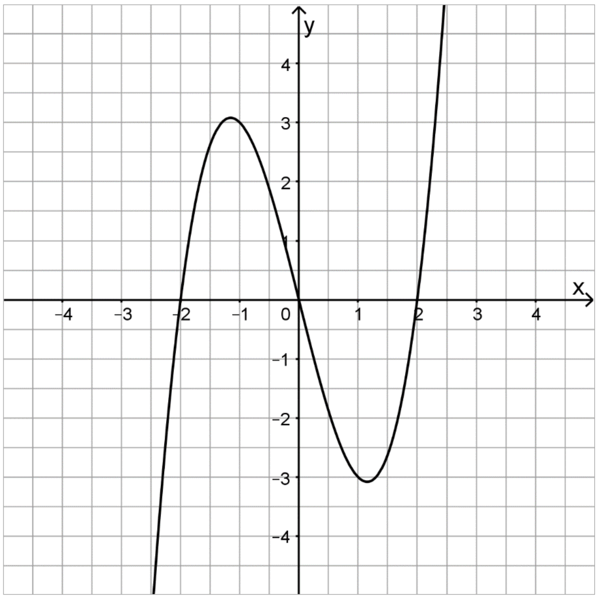
| | |
|---|---|
| **Aufgabe 1:** | Analysis |
| **Aufgabe 2:** | Analytische Geometrie |
| **Aufgabe 3:** | Stochastik |

Name, Vorname: ______________________

# Aufgabe 1: Analysis

**1.1** **BE**

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a;b}$ mit $f_{a;b}(x) = ax^3 - bx$ und $a, b \in \mathbb{R}, a > 0, b > 0$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der Funktionen der Schar.




a) Begründen Sie, dass jeder Graph der Schar symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. 2

b) Weisen Sie in Abhängigkeit von a und b nach, dass der Graph von $f_{a;b}$ einen Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ hat. Begründen Sie, dass er zudem einen Hochpunkt besitzt und dass dieser eine kleinere x-Koordinate hat als der Tiefpunkt. 6

c) Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40,5 einschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von a und b. 7

Die Funktion der Schar, deren Graph in der Abbildung dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist $f(x) = x^3 - 4x$.

d) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(2|0)$, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x - 2$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt. 7

e) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 4
*Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 4x^3 - 4x$.*

*Fortsetzung auf Seite 3*

**1.2**

Die Leitung eines großen Unternehmens versendet jeden Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden.

Die folgende Tabelle zeigt für einen bestimmten Tag, wie viele Lesebestätigungen bei der Leitung des Unternehmens bis zum jeweiligen Zeitpunkt bereits eingegangen sind.

| Zeitpunkt | 7:30 Uhr | 8:00 Uhr | 8:30 Uhr | 9:00 Uhr | 9:30 Uhr | 10:00 Uhr | …… | 14:30 Uhr | 15:00 Uhr | …… |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl der bis dahin eingegangenen Lesebestätigungen | 252 | 899 | 1701 | 2627 | 3503 | 4364 | | 7552 | 7572 | |

Beispielsweise sind von 7:00 Uhr bis 10:00 Uhr 4364 Lesebestätigungen eingegangen.

a) Ermitteln Sie mithilfe der Tabelle für den betrachteten Tag, wie viele Lesebestätigungen im Zeitraum von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im Mittel pro Stunde eingegangen sind. 3

Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $u$ und $v$ mit $u(x) = 100x^3 - 900x^2 + 2300x$ und $v(x) = 20x^2 - 520x + 2880$ die Funktion $k$ entwickelt:

$$k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \le x < 3 \\ v(x) & \text{für } 3 \le x \le 8 \end{cases}$$

Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $\frac{1}{h}$.

b) Berechnen Sie $k(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. 3

c) Es gilt $v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)$. Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist, die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben. 3

d) Berechnen Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent diese auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl von der entsprechenden Anzahl des eingangs betrachteten Tages (vergleiche Tabelle) abweicht. 5

# Aufgabe 2: Analytische Geometrie

**BE**

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3\,|\,-3\,|\,0)$, $B(3\,|\,-3\,|\,0)$, $C(3\,|\,3\,|\,0)$, $D(-3\,|\,3\,|\,0)$ und $S(0\,|\,0\,|\,4)$ sowie den Punkt $O(0\,|\,0\,|\,0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt.
Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

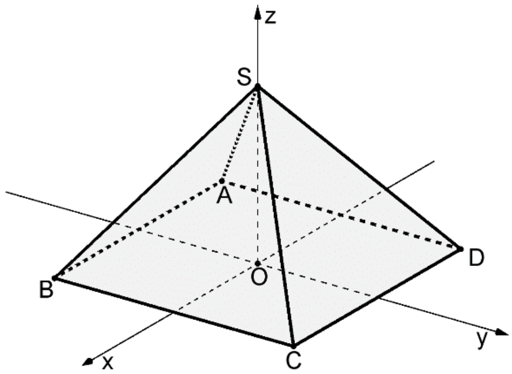



Abbildung 1

a) Berechnen Sie den Oberflächeninhalt der Pyramide. 4

b) Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist. 3

(1) $x - z = 0$ (2) $x + y + z = 4$ (3) $x + y = 0$

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform. 3

[zur Kontrolle: $4y + 3z = 12$]

d) Es gibt einen Punkt $P(0\,|\,0\,|\,p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen: 5

I $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

II $4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12$

III $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = p$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

*Fortsetzung auf Seite 5*

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: 4k \cdot x + 4\sqrt{1-k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12$ mit $-1 \leq k \leq 1$. Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene $E_{-1}$ der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene $E_1$.

e) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist. 1

f) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene $E_k$ schneidet, unabhängig von k ist. 4

Jede Ebene $E_k$ der Schar schneidet die xy-Ebene in einer Gerade $g_k$. Mit $R_k$ wird jeweils derjenige Punkt auf $g_k$ bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind $g_k$ und $R_k$ beispielhaft für eine Ebene $E_k$ der Schar dargestellt.

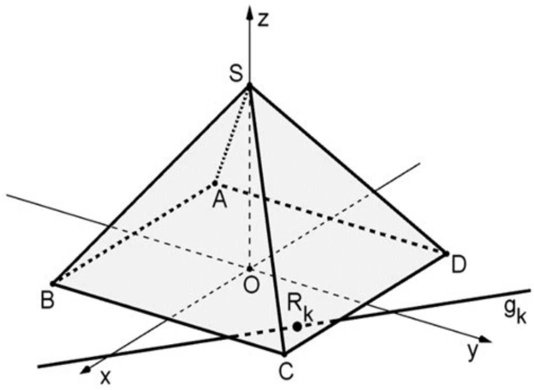


Abbildung 2

g) Zeichnen Sie die Punkte $R_{-1}$ und $R_1$ in Abbildung 2 ein. 2

h) Durchläuft k alle Werte von $-1$ bis 1, dann dreht sich die Fläche $OR_kS$ um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. 3

# Aufgabe 3: Stochastik

| **3.1** | **BE** |
|---|---|
| Bei einer statistischen Erhebung werden in einer deutschen Großstadt die privaten Haushalte mit mindestens einem Kind im Vorschulalter betrachtet. Diese werden im Folgenden als „junge Haushalte“ bezeichnet. Es wird festgestellt, dass 60 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Pkw ausgestattet sind und 8 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Lastenrad. In 14 % der jungen Haushalte ohne Pkw ist mindestens ein Lastenrad vorhanden. | |
| a) Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar. | 4 |
| b) Beurteilen Sie für diese Großstadt die folgende Aussage:<br>*Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter junger Haushalt mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet ist, ist bei einem jungen Haushalt ohne Pkw mehr als dreimal so groß wie bei einem jungen Haushalt mit mindestens einem Pkw.* | 3 |
| c) Begründen Sie, dass weniger als 68 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Pkw oder mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind. | 2 |
| 300 junge Haushalte dieser Großstadt werden zufällig ausgewählt. | |
| d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 20 und höchstens 30 dieser Haushalte mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind. | 3 |
| e) Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1-\sum_{k=201}^{300}\binom{300}{k}\cdot 0{,}6^{k}\cdot 0{,}4^{300-k}$ berechnet werden kann. | 2 |

*Fortsetzung auf Seite 7*

**3.2**

Betrachtet werden Vorderrad- und Hinterradreifen für Lastenräder. Auf einem Prüfstand kann die Laufleistung von solchen Reifen gemessen werden. Die Laufleistung gibt die auf dem Prüfstand ermittelte Gesamtstrecke an, bis der Reifen unbrauchbar wird.
Die Zufallsgröße V beschreibt die Laufleistung in Kilometern (km) der Vorderradreifen eines bestimmten Herstellers, die Zufallsgröße H der Hinterradreifen desselben Herstellers. V wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 6800 km und der Standardabweichung 530 km angenommen. H wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 4600 km und der Standardabweichung 480 km angenommen.

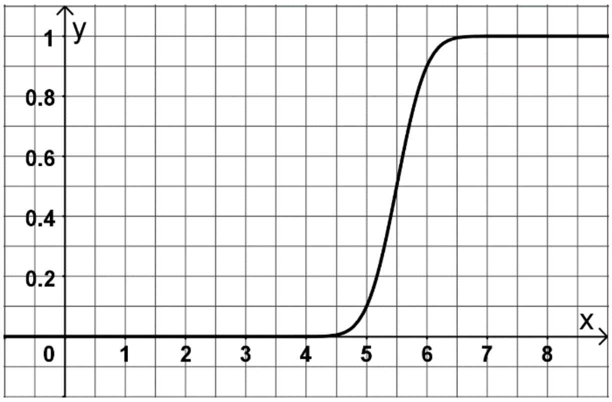
a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Vorderradreifen dieses Herstellers eine Laufleistung hat, die um höchstens 600 km vom Erwartungswert für diese Laufleistung abweicht. 3

b) Begründen Sie, dass die folgende Aussage für die Vorderrad- und Hinterradreifen dieses Herstellers wahr ist: 4

*Die Laufleistung, die ein zufällig ausgewählter Vorderradreifen gemäß dem Modell mit der Wahrscheinlichkeit von 90 % übertreffen wird, wird ein zufällig ausgewählter Hinterradreifen nahezu mit Sicherheit unterschreiten.*

c) Die Zufallsgröße Z beschreibt die Laufleistung in km der Hinterradreifen eines anderen Herstellers. Z wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu_Z$ und der Standardabweichung $\sigma_Z$ angenommen. 4

Die Abbildung stellt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = P(Z \leq 1000 \cdot x)$ dar.




Ermitteln Sie die Werte von $\mu_Z$ und $\sigma_Z$ jeweils in km.