4.3 Anforderungsbereich und Schwierigkeitsgrad

Begriffe wie „Anforderungsbereich“, „Anforderungsniveau“, „Schwierigkeitsgrad“, „Kompetenzstufen“ werden häufig im Zusammenhang mit dem Entwickeln, Stellen bzw. Analysieren von mathematischen Schüleraufgaben verwendet. Insbesondere wenn es um Aufgaben für Klausuren oder Prüfungen geht, werden Aufgaben explizit unter den Aspekten „Anforderungsbereich“ und „Schwierigkeitsgrad“ analysiert.

In der Praxis werden diese Begriffe nicht selten synonym gebraucht.

Im Folgenden soll der Begriff „Anforderungsbereich“ klar vom Begriff „Schwierigkeitsgrad“ abgegrenzt werden.

Der Begriff **Anforderungsbereich** soll den kognitiven Anspruch, den eine Aufgabe hinsichtlich der für ihre erfolgreiche Lösung zu erbringenden Leistungseigenschaften („Kompetenzen“) stellt, erfassen.

Die Beschreibung des Anforderungsbereichs I „Reproduktionsleistungen“, des Anforderungsbereichs II „Reorganisationsleistungen“ und des Anforderungsbereichs III „Problemlösungen“ bringt dies klar zum Ausdruck. Alle derartige Beschreibungen, die es zu den Anforderungsbereichen in den verschiedenen Zusammenhängen gibt (vgl. EPA, hier zitiert im Abschnitt 3.1; vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, hier zitiert im Abschnitt 4.1), verwenden als klassifizierendes Merkmal die <u>kognitive Komplexität</u> der Anforderungen, die Aufgaben oder Teilaufgaben stellen. Mit dem theoretischen Konstrukt „Anforderungsbereich“ erfasst man eine der Aufgabe innewohnende Eigenschaft, also <u>objektive</u> Aspekte der Anforderungsstruktur von Aufgaben. Die kognitive Komplexität einer Aufgabe bezogen auf Schülerinnen und Schüler oder eine Schülergruppe kann allerdings nicht losgelöst von dem erteilten Unterricht gesehen werden. Selbstverständlich hat ein den Schülerinnen und Schülern bekannter und geübter Aufgabentyp eine geringere kognitive Komplexität als eine Aufgabe, die wenig oder gar nicht vertraut ist. Begriffe wie „Kompetenzklasse“ (vgl. PISA 2000, S. 161), „Kompetenzcluster“ (vgl. PISA 2003, S. 50) oder Anforderungsniveau liegen letztlich auf derselben Begriffsebene wie Anforderungsbereich.

Auf einer völlig anderen Ebene befindet sich der Begriff **„Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe“**.

Das Erleben einer „Schwierigkeit“ kommt in der Relation „objektive Anforderungsstruktur einer Aufgabe“ zu den Bewältigungsmöglichkeiten der Aufgabenlöser zu einem bestimmten Zeitpunkt zum Ausdruck. Eine „Schwierigkeit“ ist das <u>subjektive Empfinden</u> einer bestimmten Anforderung. Gelingt es einer Schülerin oder einem Schüler, eine Anforderung zügig und korrekt zu erfüllen, so ist für sie bzw. ihn diese Aufgabe relativ „leicht“, während eine andere Schülerin oder ein anderer Schüler die gleiche Aufgabe als relativ „schwer“ empfinden kann.

Mit „schwer“, „mittel“ und „leicht“ sind zugleich Ausprägungen des Schwierigkeitsgrades genannt. Solche Einschätzungen nehmen Lehrkräfte aufgrund ihrer Unterrichtserfahrungen vor.

Genau dieses empirische Verständnis kommt in Testtheorien zum Ausdruck, nach denen Schwierigkeitsparameter berechnet werden können. Schwierigkeitsparameter stellen Erwartungswerte von Messergebnissen über eine bestimmte Population dar.

„Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe wird durch den Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler bestimmt, die die Aufgabe bearbeiten und zur richtigen Lösung kamen. Haben 80 % der Schülerinnen und Schüler, die die Aufgabe bearbeiten, sie richtig gelöst, dann hat die Aufgabe einen Schwierigkeitsgrad von 80. Als Formel:

$$p = 100 \cdot \frac{\text{Anzahl der Vpn mit richtigen Lösungen}}{\text{Anzahl der Vpn, die die Aufgabe bearbeitet haben}}$$ “ (s. INGENKAMP 1997, S. 122)[1]

Hier ist also der Erfüllungsprozentsatz bezogen auf eine Aufgabe als Kennzahl für den Schwierigkeitsgrad definiert worden. Nach dieser Definition ist der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe quantifiziert durch den Erfüllungsprozentsatz der Aufgabe innerhalb einer Population. Für repräsentative Populationen (wie sie z. B. in PISA verwendet wurden) erhält man auf diese Weise sehr gute Näherungswerte für die Lösewahrscheinlichkeit einer Aufgabe. Auf dieser Grundlage ist es möglich, Skalen zur Quantifizierung des Schwierigkeitsgrades (stets erst auf der Basis empirischer Befunde!) festzulegen.

Eine mögliche Skala von 0 bis 100 ergibt sich aus der Definition des Schwierigkeitsgrades s als Differenz aus 100 und Erfüllungsprozentsatz p. Das heißt, dass eine Aufgabe, die zu 100 % von allen Probanden gelöst wurde, den Schwierigkeitsgrad 0 hat. Das andere Ende der Skala, den Schwierigkeitsgrad 100, erhält man, wenn der Erfüllungsprozentsatz 0 ist.

Die bei PISA verwendete Skala entsteht – sehr vereinfacht ausgedrückt – aus einer Transformation der Lösewahrscheinlichkeit auf eine Skala mit dem Mittelwert 500 und einer Standardabweichung von 100 (s. z. B. PISA 2003, S. 34).[2]

Die Beurteilung des Schwierigkeitsgrades von Aufgaben erfolgt also letztlich auf empirischer Grundlage. Die diesbezüglichen Erfahrungswerte von Lehrkräften, was „leicht“, „schwer“ oder gar „sehr schwer“ ist, resultieren aus ihren Beobachtungen in der Unterrichtspraxis.

[1] V_{pn}: Versuchspersonen

[2] Auf die zahlreichen Voraussetzungen, die das Definieren und Berechnen derartiger Kennziffern erfordern, soll hier nicht näher eingegangen werden. Im Wesentlichen basiert das Vorgehen auf der probabilistischen Testtheorie und dem RASCH-Modell. Dabei wird angenommen, dass die gemessene Leistung eindimensional ist, also die Leistungen einer Versuchsperson in allen Items auf dieselbe latente Fähigkeit (hier also „mathematische Fähigkeit“) zurückgeführt werden kann. (vgl. ROST 2004)

Diese sind von der „Erfahrungswelt“ abhängig und können somit zu unterschiedlichen Einschätzungen führen. Das erklärt, weshalb Einschätzungen des Schwierigkeitsgrades einer Aufgabe von verschiedenen Lehrkräften mitunter erheblich differieren. Auch kann sich die Einschätzung des Schwierigkeitsgrades ein und derselben Aufgabe durch eine Lehrkraft im Laufe der Zeit ändern. Unbenommen haben aber diese Erfahrungswerte durchaus prognostische Bedeutung. Sie werden – mehr oder weniger bewusst – bei der Planung von Übungsfolgen bis hin zur Konzeption von Klausuren berücksichtigt, um ausgewogene, adressatengerechte Forderungen zu stellen.

Zusammengefasst kann man festhalten:

- Anforderungsbereich und Schwierigkeitsgrad sind zwei Begriffe, die deutlich zu unterscheiden sind.
- Der Begriff **Anforderungsbereich** dient der Beschreibung der objektiven Anforderungsstruktur bezüglich kognitiver Komplexität.
- Der Begriff **Schwierigkeitsgrad** gibt Auskunft über die Lösewahrscheinlichkeit einer Aufgabe bezogen auf mehr oder weniger repräsentative Probandengruppen.

Die Zusammenhänge zwischen beiden Begriffen sind keineswegs derart, dass der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben, die dem Anforderungsbereich III zugeordnet werden, automatisch auch sehr hoch ist. Umgekehrt gibt es durchaus Aufgaben, die dem Anforderungsbereich I zuzuordnen sind, die aber erfahrungsgemäß einen geringen Erfüllungsprozentsatz, also einen hohen Schwierigkeitsgrad haben.
Beispiel:
Die Aufgabe „Berechne: 1 kg + 10 g + 10 mg“ kann ab Schuljahrgang 7 als geübte Standardaufgabe (Umrechnen von Größen der Masse) wohl dem Anforderungsbereich I zugeordnet werden. Die Erfahrungen zeigen aber regelmäßig, dass der Erfüllungsprozentsatz vergleichsweise gering ist.

Die Begriffe „Anforderungsbereich“ und „Schwierigkeitsgrad“ beschreiben offenkundig wichtige Eigenschaften von Aufgaben. Der Anforderungsbereich und der Schwierigkeitsgrad stellen aber keine ausschließlich aufgabenimmanenten und von anderen Faktoren unabhängigen „Kennziffern“ dar. Sie sind also nicht vergleichbar mit z. B. stoffeigenen physikalischen Konstanten wie Dichte eines Stoffes. Vielmehr sind Schwierigkeitsgrad und Anforderungsbereich in hohem Maße abhängig vom Unterricht und von Lernprozessen. Es ist geradezu das Hauptanliegen von Mathematikunterricht, dass der Schwierigkeitsgrad von Aufgabenklassen, die laut Rahmenrichtlinien Unterrichtsgegenstand sind, herabgesetzt werden soll. Die Rahmenrichtlinien weisen die zu erreichenden Kompetenzen aus;

entsprechend soll im Mathematikunterricht darauf hin gearbeitet werden, so dass schließlich die Kompetenzen bei entsprechenden Aufgaben nachgewiesen werden können.[3]

Für die Planung von Übungsfolgen bis hin zu Klausuren ist es nun außerordentlich wichtig, Aufgaben, die auf gleiche Kompetenzen zielen, zu identifizieren bzw. zu konstruieren, so dass sie unterschiedlichen Anforderungsbereichen zugeordnet werden können und auch unterschiedlich schwierig sind. Letztlich ist dies stets durch Aufgabenvariation möglich (s. dazu Abschnitt 4.5).

In den *Niveaubestimmenden Aufgaben für den Mathematikunterricht, Schuljahrgang 8* wird als eine Möglichkeit dafür das Konstrukt der „Aufgabentripel“ verwendet.
„Ein Aufgabentripel besteht aus drei inhaltlich gleichartigen Aufgaben (A_I, A_{II}, A_{III}), wobei die Aufgabe A_I zum AFB I, die Aufgabe A_{II} zum AFB II und die Aufgabe A_{III} zum AFB III gehört.“ (s. LISA 2005, S. 52 ff.)

<u>Beispiel für ein Aufgabentripel</u> (vgl. LISA 2005, S. 64)
Zur Teilkompetenz AA 3: *Die Schülerinnen und Schüler begründen Lösungswege.*

A_I:
Gegeben sind die linearen Funktionen f_1 und f_2 durch die Gleichungen $f_1(x) = -x + 3{,}5$ und $f_2(x) = \frac{5}{3}x - 0{,}5$ sowie der Punkt S(1,5; 2).
Begründe auf verschiedene Weise, dass S der Schnittpunkt der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 ist.

A_{II}:
Gegeben ist die lineare Funktion f_1 mit $y = f_1(x) = \frac{4}{3}x - 1{,}5$ sowie der Punkt S(3; 2,5).
Ermittle die Gleichung einer linearen Funktion f_2, so dass S der Schnittpunkt der Graphen von f_1 und f_2 ist.
Begründe deinen Lösungsweg.
Äußere dich zur Behauptung, dass die Aufgabe genau eine Lösung hat.

[3] Diskussionen über „zu hohe“ Anforderungen z. B. in Vergleichsarbeiten oder zentralen Prüfungen können durchaus hier eine Ursache haben. Möglicherweise gelang es nicht, die Ziele gemäß Rahmenrichtlinien zu erreichen oder es erfolgte eine andere Interpretation von Rahmenrichtlinienvorgaben. Mit anderen Worten: Einschätzungen wie „Die Aufgaben sind zu schwer.“ können als Indiz für das Nichterreichen von Zielen der Rahmenrichtlinien angesehen werden.

A_{III}:
Gegeben sei die Funktion g mit $g(x) = m_1x + n_1$ und die lineare Funktion f mit $f(x) = m_2x + n_2$, wobei $m_1 \neq m_2$.
Untersuche, welche Bedingungen für m und n gelten müssen, damit der Schnittpunkt der Graphen beider Funktionen jeweils auf einer Koordinatenachse liegt.
Überprüfe an einem selbst gewählten Beispiel die Richtigkeit der Bedingungen für m und n.

In BLUM/DRÜKE-NOE/HARTUNG/KÖLLER 2006 findet man – mit zahlreichen Beispielen untersetzt – Ausführungen zu allgemeinen mathematischen Kompetenzen, gestuft in die drei Anforderungsbereiche.