Aufgaben mit verschiedenen Lösungswegen beim Problemlösen nutzen

Herausforderungen bei komplexen Aufgaben

Schülerinnen und Schüler haben häufig Schwierigkeiten mit komplexen Aufgaben, bei denen sie nicht sofort ein gelerntes Routineverfahren anwenden können. Dies legen auch die Rückmeldungen der Lehrkräfte zur schriftlichen Realschulabschlussprüfung Mathematik 2025 nahe, in denen komplexen Anwendungsaufgaben als anspruchsvoll bewertet werden.

Üben von Problemlösestrategien im Unterricht

Komplexen Aufgaben können im Unterricht gezielt zum Üben des mathematischen Problemlösens genutzt werden. Dabei ist es möglich, zunächst heuristische Strategien mit den Schülerinnen und Schülern zu besprechen, die hilfreich sein können, wie z. B.:

- Einzeichnen geeigneter Hilfslinien,
- Suchen gleichlanger Strecken (z. B. in geometrischen Figuren),
- Suchen ähnlicher Figuren, um Streckenverhältnisse zu ermitteln,
- Zerlegen in geeignete Teilfiguren oder Ergänzen zu geeigneter Gesamtfigur, uvm. [1]

Strategien zur Erschließung komplexer Aufgabentexte wurden im Auswertungsbericht zur schriftlichen Realschulabschlussprüfung Mathematik 2024 aufgezeigt [2].

Entwicklung von Problemlösekompetenz

Zur allgemeinen mathematischen Kompetenz *Probleme mathematisch zu lösen* gehört u. a. das „Auswählen geeigneter Heuristiken sowie das Entwickeln und Ausführen geeigneter Lösungswege“ [3]. Die Problemlösekompetenz muss im Mathematikunterricht kontinuierlich über die Schuljahre hinweg entwickelt werden. Einerseits geschieht dies durch das (angeleitete) Problemlösen mithilfe von Heuristiken, andererseits durch die Reflexion der angewendeten Heuristiken.

Aufgaben mit mehreren Lösungswegen als Chance

Besonders geeignet sind Aufgaben, bei denen durch verschiedene Lösungswege ein Ergebnis gefunden werden kann bzw. die mehrere Lösungen haben können. Beispiele dazu finden sich auch in Aufgaben der schriftlichen Realschulabschlussprüfung Mathematik 2025.
Die Aufgabe 11 im Pflichtteil 1 (siehe Abbildung 1) ist eine Aufgabe mit mehreren Lösungen.

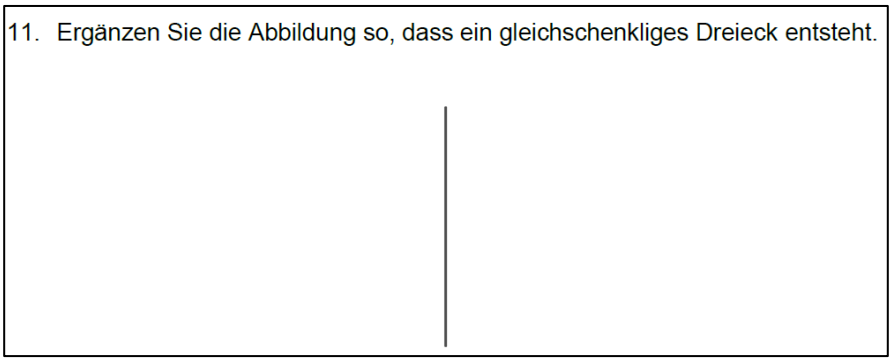


Abbildung 1: Aufgabe 11 im Pflichtteil 1 der schriftlichen Realschulabschlussprüfung Mathematik 2025

Den Schülerinnen und Schülern wird durch solche Aufgaben ein individueller Zugang zur Lösung der Aufgabe ermöglicht, der ihren Vorkenntnissen und ihrer Denkweise entspricht. Dies spiegelt sich in einer vergleichsweise hohen Erfüllungsquote von 85 % bei dieser Aufgabe wider. So kann die gegebene Strecke beispielsweise als einer der beiden (gleich großen) Schenkel, als Basis oder als Höhe des Dreiecks gewählt werden. Eine weitere mögliche Lösung ist das Zeichnen eines gleichseitigen Dreiecks.

Förderung mathematischer Kompetenzen durch Reflexion

Solche Aufgaben bieten Schülerinnen und Schülern im Unterricht die Möglichkeit, sich mit anderen auszutauschen, die eigenen Lösungsgedanken zu formulieren und verschiedene Herangehensweisen zu reflektieren. Das Behandeln mehrerer Lösungswege fördert den Aufbau mathematischer Kompetenzen (insbesondere *Probleme mathematisch lösen* und *Mathematisch modellieren*) sowie die Verständnisorientierung, da verschiedene Inhalte miteinander vernetzt werden. Um flexibles Wissen aufzubauen, ist es notwendig, Probleme aus verschiedenen Perspektiven zu betrachten. Das kann auch Vorteile beim Lösen komplexer, unvertrauter Aufgaben bringen. Insbesondere trägt die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Lösungswegen dazu bei, das Interesse, das Kompetenzerleben und die Freude der Schülerinnen und Schüler im Unterricht zu steigern [4]. Auch eine Verbesserung der Selbstregulation im Umgang mit neuen Anforderungen kann durch Aufgaben mit mehreren Lösungswegen erreicht werden.

Rolle der Lehrkraft und Unterrichtsgestaltung

Im Unterricht sollten Schülerinnen und Schüler daher einerseits die Möglichkeit bekommen, Lösungswege eigenständig zu entdecken. Andererseits sollten verschiedene Lösungswege gegenübergestellt und im Unterricht besprochen werden. Lehrkräfte sollten die Schülerinnen und Schüler dabei unterstützen, indem sie ihnen beispielsweise komplexe Aufgaben mit mehreren Lösungswegen geben und sie gezielt auffordern, mehrere Lösungswege zu entwickeln. Darüber hinaus sollten sie Diskussionen über verschiedene Lösungswege zulassen bzw. anregen und die Schülerinnen und Schüler dazu ermutigen, verschiedene Lösungswege miteinander zu vergleichen und darüber zu reflektieren. Dies kann dazu beitragen, dass Schülerinnen und Schüler ein höheres Kompetenzerleben im Unterricht erfahren, wodurch sich ihre Motivation und letztlich auch ihre Leistungen steigern lassen. Es konnte gezeigt werden, dass vor allem Schülerinnen und Schüler mit

geringer Selbstwirksamkeit ihr Kompetenzerleben in einem Unterricht, in dem Aufgaben mit mehreren Lösungswegen behandelt werden, überdurchschnittlich stark steigerten [4].

Beispiele aus Abschlussprüfungen

Auch in den schriftlichen Abschlussprüfungen im Fach Mathematik finden sich Aufgaben, bei denen es mehrere Lösungswege gibt. Ein Beispiel ist die Wahlaufgabe 2c der Prüfung 2025 (s. Abbildung 2) [5].

c) Die Querschnittsfläche des Kanals hat die Form eines Trapezes und beträgt ca. 5200 m^2. Die Abbildung 2 zeigt den Querschnitt des Suezkanals inklusive des Schiffs „Ever Given“. Alle Angaben sind in Metern gegeben. Der Tiefgang t eines Schiffs ist die Entfernung von der Wasseroberfläche bis zum tiefsten Punkt des Schiffs (siehe Abbildung 2).

Ermitteln Sie den Tiefgang t der „Ever Given“.

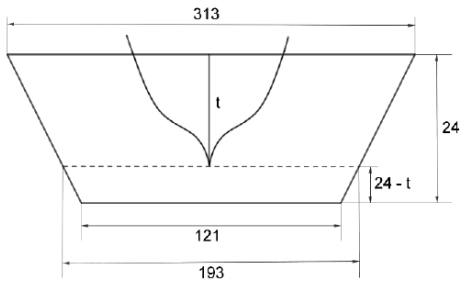


Abbildung 2
(nicht maßstäblich)

Abbildung 2: Wahlpflichtaufgabe 2c der schriftlichen Realschulabschlussprüfung Mathematik 2025

Im Folgenden werden verschiedene Lösungswege zur Teilaufgabe 2c präsentiert, die von Schülerinnen und Schülern in der Prüfung entwickelt wurden.

Lösungsweg 1:

Ansatz: Anwendung der Ähnlichkeit

$$\frac{96}{36} = \frac{24}{24 - t}$$
$$96t = 1440$$
$$t = 15$$

Der Tiefgang des Schiffes beträgt 15 m.

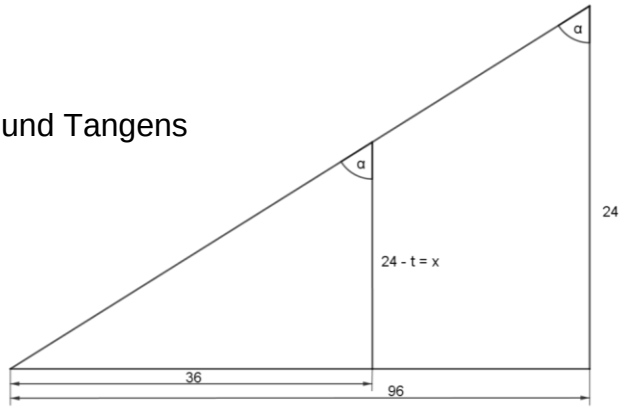
Lösungsweg 2:

Ansatz: Stufenwinkel, rechwinkliges Dreieck und Tangens

$\tan\alpha = \frac{96}{24} \rightarrow \alpha \approx 76°$

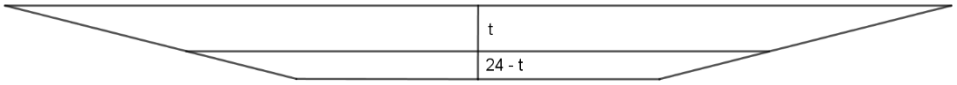
$x = \frac{36}{\tan 76°} \approx 9 \rightarrow t = 24 - 9 = 15$

Der Tiefgang des Schiffes beträgt ca. 15 m.



Lösungsweg 3:

Ansatz: Maßstab (Ähnlichkeit) über maßstäbliche Konstruktion/Zeichnung im Maßstab $1:2500$



Abmessen des Abstands t in der Zeichnung liefert: $t = 0{,}6 \cdot 2500 = 15$

Der Tiefgang des Schiffes beträgt ca. 15 m.

Lösungsweg 4:

Ansatz: Ähnlichkeit, hier über prozentuale Verkleinerung

$96 \mathrel{\hat{=}} 100\ \%$
$36 \mathrel{\hat{=}} x$ $\rightarrow x = 37{,}5\ \%$

→ übertragen auf Höhe des Trapezes (entspricht der Tiefe des Kanals):

$24 \mathrel{\hat{=}} 100\ \%$
$h \mathrel{\hat{=}} 37{,}5\ \%$ $\rightarrow h = 9$

$t = 24 - 9 = 15$ Der Tiefgang des Schiffes beträgt 15 m.

Lösungsweg 5:

Ansatz: zusammengesetzte Fläche (zwei kleine Trapezflächen ergeben zusammen die Querschnittsfläche des Kanals)

$$5208 = \frac{(193+313)}{2}\cdot t + \frac{(193+121)}{2}\cdot(24-t)$$
$$5208 = 253t + 3768 - 157t$$
$$1440 = 96t$$
$$15 = t$$

Der Tiefgang des Schiffes beträgt 15 m.

Mit den gezeigten, verschiedenen Lösungswegen haben die Schülerinnen und Schüler jeweils das korrekte Ergebnis erhalten.

Reflexion und Fehleranalyse

Bei dieser Aufgabe bietet es sich auch an, im Unterricht die verschiedenen Lösungswege gegenüberzustellen und darüber zu reflektieren:

- Wo finden sich Gemeinsamkeiten und Unterschiede?
- Welche mathematischen Inhalte werden benutzt und wie stehen diese im Zusammenhang?
- Welcher Lösungsweg ist besonders effizient und warum?
- Welcher Lösungsweg ist besonders kreativ oder unerwartet? etc.

Falls falsche Lösungsansätze gefunden wurden, bieten auch diese Möglichkeiten zur Reflexion.

- Was sind die grundsätzlichen Überlegungen für den Ansatz gewesen?
- Welche Ideen oder Gedanken sind korrekt?
- An welcher Stelle ist der Fehler entstanden bzw. um welche Art Fehler handelt es sich?
- Ist das Ergebnis plausibel? bzw. Passt das Ergebnis zum Kontext? etc.

Lernförderlichkeit von Aufgaben mit mehreren Lösungswegen

Aufgaben mit mehreren Lösungswegen bzw. Lösungen fördern nicht nur das mathematische Verständnis, sondern auch wichtige überfachliche Kompetenzen wie Kreativität, Flexibilität und Kommunikationsfähigkeit. Sie motivieren die Schülerinnen und Schüler, regen zur Reflexion an und unterstützen einen nachhaltigen Kompetenzerwerb. Damit leisten solche Aufgaben einen wertvollen Beitrag zu einem modernen und schülerorientierten Mathematikunterricht.

Quellen:

[1] Filler, A. (2019/20): Zusammenfassende Notizen zur Vorlesung „Einführung in die Mathematikdidaktik und Didaktik der Geometrie, Teil 11“. Wintersemester 2019/20. Berlin

[2] Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung Sachsen-Anhalt (Hrsg.) (2024): Auswertungsbericht schriftliche Realschulabschlussprüfung Mathematik. Schuljahr 2023/2024. Halle (Saale). URL: https://www.bildung-lsa.de/informationsportal/unterricht/sekundarschule/schulformbezogene_informationen/schriftliche_abschlusspruefung___realschulabschluss.htm

[3] Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2022): Bildungsstandards für das Fach Mathematik Erster Schulabschluss und Mittlerer Schulabschluss. Berlin URL: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-ESA-MSA-Mathe.pdf

[4] Schukajlow, S. & Krawitz, J. (2020): Ist Lösungsvielfalt lernförderlich? Multiple Lösungen beim Mathematischen Modellieren. MNU Journal, 73, 182-187.

[5] Ministerium für Bildung Sachsen-Anhalt (Hrsg.) (2025), Schriftliche Realschulabschlussprüfung Mathematik. URL: https://www.bildung-lsa.de/informationsportal/unterricht/sekundarschule/schulformbezogene_informationen/schriftliche_abschlusspruefung___realschulabschluss.htm