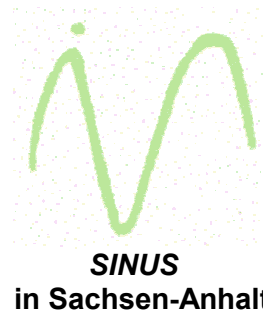


Funktionen



**„Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen:
Kumulatives Lernen“**

Modul 5



Landesinstitut für Lehrerfortbildung,
Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung

Funktionen

**„Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen:
Kumulatives Lernen“**

Modul 5

Das BLK-Modellversuchs-Programm „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (SINUS) wird durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) und durch die Kultusminister der Länder gemeinsam gefördert.
Förderkennzeichen: A 6674

Der Modellversuch hat eine Laufzeit vom 01.04.1998 bis 31.03.2003

Herausgeber:	 Sachsen-Anhalt Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt Kleine Steinstraße 7 06108 Halle (Saale)	
Projektleiter:	Lichtenberg, Willi Dr. Pruzina, Manfred	LISA Halle (bis 31.12.2000) LISA Halle (ab 06.08.2001)
Redaktion:	Rafler, Cornelia	Christian-Wolff-Gymnasium Halle
Layout:	Schoebbel, Christiane	
Arbeitsgruppe:	Eckhardt, Margit Ehricht, Sieglinde Grosch, Rolf Grünewald, Marlies Hoffmann, Uwe Lange, Udo Pralow, Steffi Rafler, Cornelia Schulze, Martina	G.-Cantor-Gymnasium Halle Sekundarschule „Adam Ries“ Halle IGS „W. Brandt“ Magdeburg Sekundarschule „Adam Ries“ Halle Francisceum Zerbst Sekundarschule „J. W. v. Goethe“ Stendal IGS „W. Brandt“ Magdeburg Christian-Wolff-Gymnasium Halle Sekundarschule „Adam Ries“ Halle

Druck: RUPA-DRUCK DESSAU

LISA HALLE 2003 – 1. Auflage – 900 Exemplare

Vorwort

Der Modellversuch „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (SINUS) wurde von der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (BLK) als eine Reaktion auf die 1997 veröffentlichten TIMSS-Ergebnisse aufgelegt.

Das Land Sachsen-Anhalt beteiligte sich mit einem Schulset (6 Schulen) daran, und zwar mit zwei Sekundarschulen, drei Gymnasien und einer Integrierten Gesamtschule.

Die Projektleitung wurde im Auftrage des Kultusministeriums von Mitarbeitern des Landesinstituts für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt (LISA) wahrgenommen.

In einer überschulischen Arbeitsgruppe entwickelten Lehrkräfte der Modellversuchsschulen Ideen, Konzepte und Materialien für die Unterrichtspraxis, um die Qualität des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts zu verbessern. Diese wurden im Unterricht der Modellversuchsschulen erprobt, überarbeitet und zugehörige methodisch-didaktische Erfahrungen bilanziert.

Bei der Zusammenstellung der entwickelten Materialien, Ergebnisse und Erfahrungen in den vorliegenden Heften wurde großer Wert darauf gelegt, ausreichend Informationen für die Nachnutzung anzubieten.

Auf die Frage, welches die wichtigste Erfahrung der „SINUS-Lehrkräfte“ im Modellversuch ist, ergab sich in der Endphase des Modellversuches folgende Antwort:

„Die Arbeit im Modellversuch forderte und förderte die konkrete und ergebnisorientierte **Kommunikation und Kooperation der Lehrkräfte** verschiedener Schulen. Das Erproben der entwickelten Konzepte auf der Ebene der Schulen stimulierte wiederum das Auseinandersetzen mit inhaltlichen und methodischen Konzepten innerhalb der Schule.“

Die auf die praktische Unterrichtsarbeit zielende Kommunikation einschließlich verbindlicher Absprachen wird als wesentliche Bereicherung empfunden.

Dies ist sicher nicht neu, doch diese alte Erfahrung im schulischen Alltag umzusetzen, sie zu praktizieren, das ist immer wieder eine neue Herausforderung.

In diesem Sinne wünschen sich die Autorinnen und Autoren, dass das vorliegende Heft Anlass für Diskussionen in der Fachschaft ist und auf diesem Wege einen Beitrag zur Steigerung der Effizienz des Unterrichts leistet.

Dr. Siegfried Eisenmann
Präsident

Das Programm SINUS

Das BLK-Programm SINUS („Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“) hat zum Ziel, durch Förderung einer schulinternen und schulübergreifenden Kooperation und Zusammenarbeit von Lehrkräften und Mitarbeitern von Bildungseinrichtungen des Bundes und der jeweiligen Länder die Effizienz des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu verbessern. Bundesweit beteiligen sich 180 Schulen, die in regionale Schulsets gebündelt sind.

Das Programm wird jeweils zur Hälfte aus Mitteln des Bundes und des Landes Sachsen-Anhalt finanziert.

Für das gesamte Programm auf Bundesebene ist das Institut für die Praxis der Naturwissenschaften Kiel (http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/blkstefr.htm) in Zusammenarbeit mit dem Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München (<http://www.isb.bayern.de/>) und dem Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth (<http://blk.mat.uni-bayreuth.de/>) verantwortlich.

Für Sachsen-Anhalt wurde das Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt (LISA) durch das Kultusministerium beauftragt, die Leitung und Koordination des Programms auf Landesebene zu übernehmen (<http://www.modellversuche.bildung-lsa.de/>).

Seit Beginn des Schuljahres 1998/99 beteiligen sich sechs Schulen aus Sachsen-Anhalt an diesem Programm, deren gemeinsame Arbeit sich auf 3 Module konzentriert:

Modul 2: „Naturwissenschaftliches Arbeiten“,

Modul 4: „Sicherung von Basiswissen – Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus“,

Modul 5: „Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: Kumulatives Lernen“.

Inhaltsverzeichnis

	Seite
1 Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen – kumulatives Lernen	6
2 Phasen des Kompetenzzuwachses bei der Behandlung des thematischen Schwerpunktes „Zuordnung und Funktionen“	8
3 Grundbegriffe der Funktionslehre	10
3.1 Sicherung des Ausgangsniveaus	10
3.2 Vorschläge zur Gestaltung von Einführungsstunden	22
3.3 Aufgaben zur Erstfestigung des Begriffs „Funktion“	32
4 Aufgabenbeispiele zum Thema „Lineare Funktionen“	34
4.1 Zur Einstiegsphase	34
4.2 Aufgaben zur Funktionsdarstellung und zur Anwendung	35
5 Aufgabenvielfalt zum Funktionsbegriff	39
5.1 Erläuterungsaufgaben	39
5.2 Aufgaben zur Systematisierung	43
5.3 Aufgaben besonderer Art	46
6 Erfahrungen und Befunde	65
6.1 Zu Schülermeinungen	65
6.2 Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis	68
7 Zusammenfassung	70
Literaturverzeichnis	71

1 **Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen – kumulatives Lernen**

Im Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ heißt es:

„Lernanstrengungen lohnen nur dann, wenn ersichtlich ist, was man hinterher kann. Schülerinnen und Schüler, die sich über mehrere Jahre mit mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhalten auseinandersetzen, müssen spüren können, dass sie in ihrer fachbezogenen Kompetenzentwicklung voranschreiten. Dies wird dann erfahrbar, wenn sie eine Vorstellung darüber entwickeln konnten, wie die Lerninhalte aufeinander aufbauen und in dieser Verknüpfung die Grundlage für ein Verständnis komplexer Sachverhalte schaffen.“ (vgl. /1/, S. 93)

Eine Voraussetzung dafür, dass kumulatives Lernen möglich wird, besteht in einer entsprechenden stimmigen Sequenzierung des Lehrstoffes. Dies ist in Sachsen-Anhalt für das Fach Mathematik durch die Vorplanung in den Rahmenrichtlinien gegeben. Die Rahmenrichtlinien in allen Fächern enthalten einen Abschnitt „Qualifikationen, Ziele und fachdidaktische Konzeption“. Insbesondere im Fach Mathematik sind hier die schuljahrgangsübergreifenden thematischen Schwerpunkte benannt und beschrieben (vgl. /2/, S. 9 ff. und /3/, S. 9 ff.). Damit sind für das Fach Mathematik auf der Ebene der zentralen Vorplanung des Unterrichts gute Ausgangsbedingungen für das Gestalten eines fachlich und didaktisch kohärenten Unterrichts gegeben.

Der nächste Schritt besteht nun darin, diese intendierte Planung sich als Lehrkraft bewusst zu machen und sie inhaltlich und didaktisch-methodisch zu konkretisieren.

Auch hier gibt es für den Mathematikunterricht bereits eine günstige Ausgangssituation, da die Themen vielfach gut strukturiert und methodisch durchdacht aufbereitet sind, z. B. in Lehrbüchern.

Es kommt nun vor allem darauf an, dass die Lehrkraft sich die dem Stoff innewohnenden Linienführungen bewusst macht und sie konsequent im Unterricht auch berücksichtigt. So schreiben HARMS/BÜNDER in den Erläuterungen zum Modul 5:

Kumulatives Lernen: Der Unterricht muss so aufgebaut sein und durchgeführt werden, dass fortschreitendes Lernen ermöglicht wird und von den Lernenden erreicht werden kann. (vgl. /4/, S. 2)

Damit wird nun zugleich nachdrücklich gesagt, dass die Bemühungen letztlich darauf zielen und auch daran gemessen werden müssen (!), ob die Schülerinnen und Schüler dieses kumulative Lernen auch in diesem Sinne erleben, sie also den „Zuwachs an Kompetenz“ erfahren.

Kompetenzerfahrung: Der Unterricht sollte die Schülerinnen und Schüler erfahren lassen, dass sie durch ihr Lernen ihr Wissen und Können Stück für Stück erweitern und vertiefen. (vgl. /4/, S. 2)

Von diesen grundsätzlichen Überlegungen ausgehend wurde für die Gestaltung kumulativer Lernprozesse folgende didaktisch-methodische **Handlungsorientierung** herausgearbeitet:

a) auf der stofflichen Ebene

- Lerninhalte so anbieten, dass die Schülerinnen und Schüler den aufbauenden Charakter erkennen
- Lerninhalte sachlogisch miteinander verknüpfen (als Grundlage für das Verständnis komplexer Sachverhalte)
- Wissens Elemente (insbesondere Begriffe) horizontal (additiv) und vertikal (kumulativ) miteinander verknüpfen
- Wiederholungsaufgaben in den aktuellen Unterrichtsstoff einbetten
- Vorkenntnisse (Alltagswissen, Faktenwissen aus dem Unterricht oder Kenntnisse aus anderen Fächern) der Schülerinnen und Schüler als Ausgangspunkt des Lernprozesses verwenden

b) auf der methodischen Ebene

- Hoher Anteil an selbstständiger Schülertätigkeit
- Festigung von Wissen und Können als kontinuierlichen Prozess gestalten
- Sicherung von solidem und anwendungsbereitem Grundwissen und Grundkönnen und entsprechenden Kompetenzzuwachs bewusst machen
- Phasen der Systematisierung und Reflexion gestalten.

Während der Auseinandersetzung mit dem Anliegen des kumulativen Lernens hat sich gezeigt, dass Handlungsbedarf vor allem in folgenden Bereichen zu sehen ist:

- (1) Anwendungsbezogene Unterrichtseinstiege finden und Verbindungen zu Vorkenntnissen herstellen
- (2) Vielfältige Aufgabenstellungen zu einem Thema bereitstellen (vielfältig in Bezug auf verschiedene Aspekte, u. a. vielfältige inhaltliche Forderungen, vielfältige Darbietungsformen, vielfältige unterrichtliche Einbettungen)
- (3) Mehr explizite Aufmerksamkeit den *Begriffen* im Mathematikunterricht widmen (sie werden in der Unterrichtspraxis oftmals nur im Rahmen der Erarbeitung explizit behandelt, dann spielen sie mehr und mehr nur implizit beim Lösen von Aufgaben eine Rolle, z. B. „Stelle die Funktion f grafisch dar ...“). In diesem Zusammenhang soll auch untersucht werden, welche Rolle „Erläuterungsaufgaben“ spielen können.
- (4) Erkunden der Schülerwahrnehmung in Bezug auf das kumulative Lernen.

Für die unterrichtspraktische Arbeit wurde das Thema „Funktionen“ gewählt. Es bietet sich u. E. besonders an, weil in diesem Thema zum einen die fundamentale Idee „Qualitative und quantitative Beschreibung funktionaler Zusammenhänge“ gezielt Gegenstand ist, und zum anderen in dieser Thematik der kumulative Aspekt ganz vordergründig ist: Ein Grundgerüst an Begriffen wird auf verschiedene Funktionsklassen über mehrere Schuljahre angewendet.

2 Phasen des Kompetenzzuwachses bei der Behandlung des thematischen Schwerpunktes „Zuordnung und Funktionen“

In den RRL Mathematik für Sekundarschulen (und auch für Gymnasien) heißt es (gültig für den Unterricht ab Klassenstufe 7):

Zuordnungen und Funktionen stellen ein unverzichtbares Hilfsmittel zur Beschreibung von Zusammenhängen dar. Deshalb sollen die Schülerinnen und Schüler

- ausgehend vom Begriff „Zuordnung“ den Funktionsbegriff erfassen,
- mit verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen vertraut sein,
- Kenntnisse über ausgewählte Funktionen bzw. Funktionsklassen durch die Untersuchung ihrer Eigenschaften erwerben,
- grafische Darstellungen von Zuordnungen sicher anfertigen und interpretieren können,
- Funktionen zur Lösung von Aufgaben nutzen können.“ (vgl. /2/, S. 10)

Dabei kann an propädeutische Vorerfahrungen und an Vorkenntnisse aus der Förderstufe und aus dem Schuljahrgang 7 angeknüpft werden.

- Begriff „Zuordnung“ im täglichen Leben und in der „Mathematik“
- Direkte und indirekte proportionale Zuordnungen (Wortvorschrift, Diagramm, einfache Berechnungen)
- Grafische Darstellung im kartesischen Koordinatensystem (ab Klassenstufe 7 Erweiterung auf alle 4 Quadranten).

Das explizite Thematisieren des BEGRIFFS Funktion und das systematische Behandeln von Funktionsklassen erfolgt ab Schuljahrgang (im Folgenden kurz SJG) 8.

Hier werden wichtige Grundlagen für das „Verstehen“ von Funktionen gelegt. Diese Grundkenntnisse werden aufsteigend in den folgenden Schuljahrgängen immer wieder aufgegriffen und zum erfolgreichen Weiterlernen benötigt. Nur durch sicheres Beherrschen der Grundkenntnisse ist in den folgenden Jahrgängen erst ein kumulatives Lernen möglich.

Im Einzelnen sind in den Schuljahren bis 10 folgende Schwerpunkte ausgewiesen:

SJG¹	Inhalte (für Sekundarschulen und Gymnasien im Detail differenziert)
8	Zuordnungen Begriff „Funktion“ Weitere Begriffe: Definitionsbereich, Wertebereich, Argument, Funktionswert Funktionsdarstellungen: Wertetabelle, Funktionsgleichung, Graph, Wortvorschrift, Menge geordneter Paare Lineare Funktion: Anstieg, absolutes Glied, Graph, Monotonie Begriff „Nullstelle“ Anwendungen
9	Quadratische Funktionen Parabel, Scheitelpunkt, Monotonie, Symmetrie, Nullstellen
10	Winkelfunktionen (in Sekundarschule nur sin-Funktion) weitere Eigenschaften: Periodizität, Unendlichkeitsstellen Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen (In Sekundarschule nur exemplarisch) Logarithmusfunktion, inverse Funktion (nur am Gymnasium)

Die folgende Übersicht zeigt den zu behandelnden Stoff anders geordnet.

Funktionstyp	Begriffe	Darstellungsformen	Eigenschaften	Anwendungsbereiche
Lineare Funktionen	Funktion Graph DB, WB Argument Funktionswert Anstieg	Wertetabelle Punkt-Richtungs-Form (bzw. Steigungsdreieck) Zwei-Punkte-Form	Monotonie Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen	Sachaufgaben Geometrie
Quadratische Funktionen	Parabel Parameter	Parabel verschobene oder gestauchte bzw. bestreckte Parabel	Symmetrie Extrempunkte	Sachaufgaben Nullstellenberechnungen Schnittaufgaben
Trigonometr. Funktionen	Definitionslücke (Polstelle)	Darstellung über die Eigenschaften	Periodizität	Geometrie Physik
Potenzfunktionen		Hyperbel	Achsen- bzw. Punktsymmetrie	
Exponentialfunktionen				Wachstums- u. Zerfallsprozesse
Logarithmusfunktion	Umkehrfunktion		eindeutig umkehrbar	

¹ In Sachsen-Anhalt erfolgt die Vorplanung in den Rahmenrichtlinien zusammengefasst für die Schuljahrgänge 7 und 8 bzw. 9 und 10. Hier wurde eine bewährte zeitliche Abfolge in den drei Schuljahrgängen zu Grunde gelegt.

3 Grundbegriffe der Funktionslehre

3.1 Sicherung des Ausgangsniveaus

Es werden fünf Unterrichtseinheiten zur Sicherung des Ausgangsniveaus zur Einführung linearer Funktionen im Schuljahrgang 8 vorgeschlagen. Diese beziehen sich besonders auf die Themen „Zuordnungen“ und „indirekte Proportionalität“.

1. Unterrichtseinheit: Zuordnungen (allgemein)
2. Unterrichtseinheit: Direkte Proportionalität
3. Unterrichtseinheit: Indirekte Proportionalität
4. Unterrichtseinheit: Übungen zur indirekten Proportionalität
5. Unterrichtseinheit: Vermischte Übungen zu Zuordnungen

„Auf der Grundlage ihrer Vorkenntnisse über Zuordnungen und durch die Einführung der indirekten Proportionalität erweitern die Schülerinnen und Schüler ihre Fähigkeiten, Zuordnungen sicher identifizieren und unterscheiden zu können.“ (RRL Sekundarschule SJG 7 – 10 Mathematik, S. 36)

Im vorliegenden Material werden mehr Aufgaben vorgeschlagen, als im Unterricht in der zur Verfügung stehenden Zeit gelöst werden können. Die Lehrkraft sollte in Abhängigkeit von der konkreten Klassensituation (Vorkenntnisse, Motivation) eine Auswahl treffen.

Die indirekte Proportionalität wird in der Förderstufe als „empfohlener Lerninhalt“ dargeboten. Man kann also nicht davon ausgehen, dass alle Schülerinnen und Schüler über diese Art der Zuordnung sichere Kenntnisse besitzen.

1. Unterrichtseinheit: Zuordnungen (allgemein)

Zielstellung

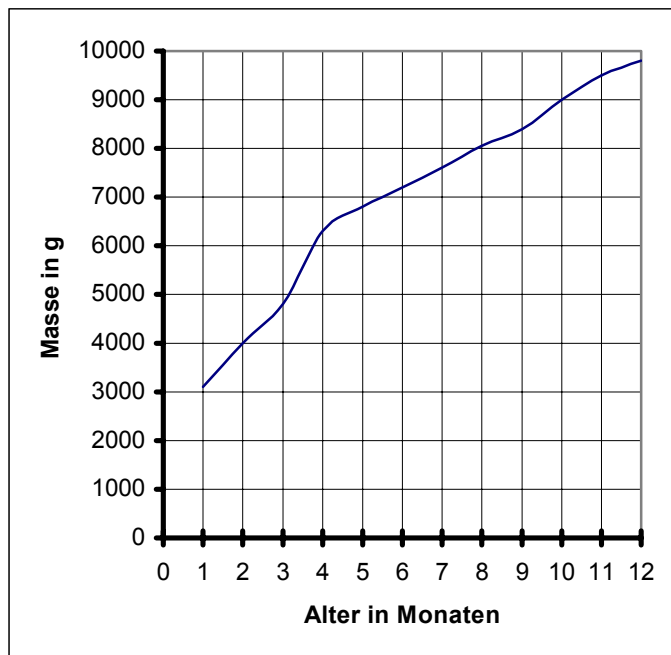
Zwei Zahlenbereiche oder Größen werden in eine Beziehung gesetzt.

Verschiedene Darstellungsformen (Tabelle, Graph, Wortvorschrift, Zuordnungspfeile, ...) werden ineinander überführt.

Beispiele aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler (Fieberkurve, Klimadiagramm, Zeitungsbeiträge, aktuelles Material, ...) verwenden.

Einstiegsaufgabe:

Frau Groß hat ein Baby bekommen und kontrolliert die Masse ihrer Tochter regelmäßig. Sie überträgt die Werte in ein Diagramm.



Mögliche Aufgabenstellungen:

1. Welche Größen sind an den Achsen angetragen?
2. Welche Angaben kann man dem Diagramm entnehmen?
3. Kann man die Werte in einer anderen Form darstellen?

oder

1. Sprich zu dem Diagramm!
2. Welche Aufgabenstellungen könnte man zu dem Diagramm finden?

Im Anschluss könnten Schülerinnen und Schüler weitere Beispiele aus dem „täglichen Leben“ nennen, bei denen Zuordnungen auftreten, und diese durch mögliche Darstellungsformen ergänzen.

Schüler → Klasse

Haus → Hausnummer

Paket → Porto

Auto → Kennzeichen

Person → Geburtstag

Euro → Dollar

Land → Hauptstadt

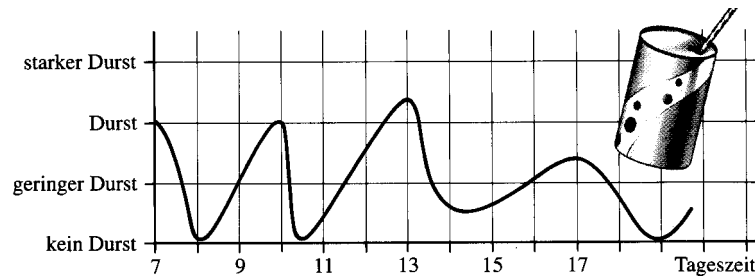
Ware → Preis

Konto → Kontostand

Weitere Aufgaben, die im Verlauf der Unterrichtsstunde gelöst werden können:

1. Der Wert eines Autos nimmt im Verlauf eines Jahres um 20 % ab.
 - a) Erstelle eine Tabelle für den Gebrauchtwert des Autos nach 1, 2, 3, 4, 5 und 6 Jahren und zeichne den Graphen.
 - b) Wann ist es am günstigsten, das Auto zu verkaufen? Denke bei deiner Entscheidung auch an die Reparaturbedürftigkeit des Autos!

2. Die Grafik zeigt das Durstempfinden eines Mädchens während der Winterzeit. Was kannst du über das Durstgefühl dieses Mädchens aussagen? Wie könnte der Verlauf an einem Sommertag aussehen?

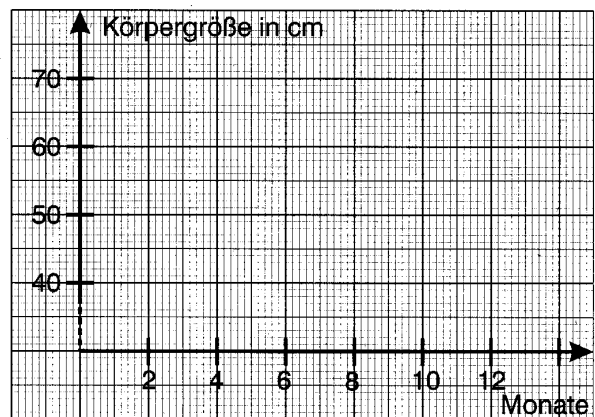


(Aus: /7/, S. 46, Nr. 1)

3. Übertrage die Werte für Laras Körperwachstum in die Grafik und schätze, wie groß sie in den „ungeraden Monaten“ war.

Kannst du angeben, welche Körpergröße sie im 24. Monat haben wird? Begründe.

Geburtsgröße : 48 cm
 2. Monat: 56 cm
 4. Monat: 62 cm
 6. Monat: 66 cm
 8. Monat: 70 cm
 10. Monat: 72 cm
 12. Monat: 74 cm

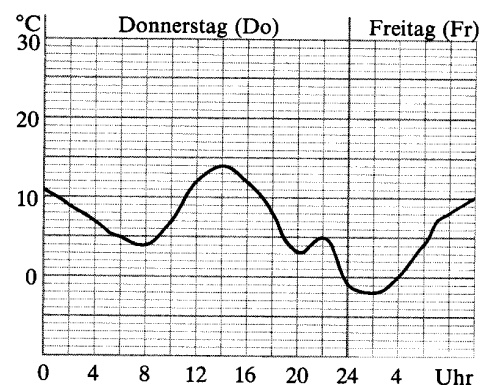


Monat	1	3	5	7	9	11	13
Länge in cm							

(Aus /6/, S. 7, Nr. 2)

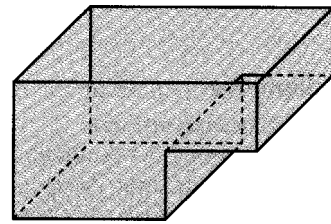
4. Die Grafik zeigt die Zuordnung Uhrzeit → Temperatur, die von einem Temperaturschreiber aufgezeichnet wurde.

Welche Fragen kann man zu diesem Diagramm stellen?

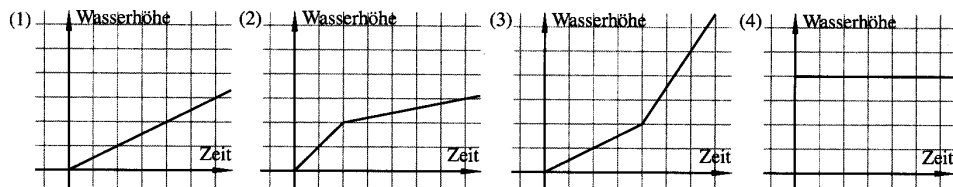


(Aus /5/, S. 43, Nr. 6)

5. Rechts siehst du die Darstellung eines Schwimmbeckens. In dieses Schwimmbecken wird gleichmäßig Wasser eingelassen. Während das Wasser einfließt, gehört zu jedem Zeitpunkt eine ganz bestimmte Wasserhöhe.



Welcher der Graphen (1) bis (4) passt dazu?
Begründe!



(Aus /5/, S. 45, Nr. 14)

6. Aus der Übersicht kann man die Portokosten für Pakete entnehmen.
Die Firma Eisenherz verschickt innerhalb einer Woche 6 Pakete an einen Schlosser.
Die Einzelmassen der Pakete betrugen:
1,5 kg; 2,9 kg; 14 kg; 7,5 kg; 17 kg; 5 kg.

- a) Berechne die Portokosten für die einzelnen Lieferungen!
b) Hätte die Firma Kosten sparen können?

<i>Masse</i>	<i>Porto</i>
bis 2 kg	4,50 €
über 2 bis 4 kg	5,00 €
über 4 bis 6 kg	5,50 €
über 6 bis 8 kg	6,00 €
über 8 bis 10 kg	6,50 €
über 10 bis 12 kg	7,00 €
über 12 bis 14 kg	7,50 €
über 14 bis 16 kg	8,00 €
über 16 bis 18 kg	8,50 €
über 18 bis 20 kg	9,00 €

2. Unterrichtseinheit: Direkte Proportionalität

Zielstellung

Wiederholung der Eigenschaften der direkten Proportionalität:

- Zwei Zahlen bzw. Größen stehen zueinander im gleichen Verhältnis (Je mehr ..., um so mehr ...)
- Zugeordnete Zahlen bzw. Größen sind quotientengleich; Bedeutung des Proportionalitätsfaktors
- Lösen von Aufgaben durch den Dreisatz, Verhältnisgleichungen, inhaltliche Überlegungen oder Nutzen von grafischen Darstellungen
- Der Graph ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung

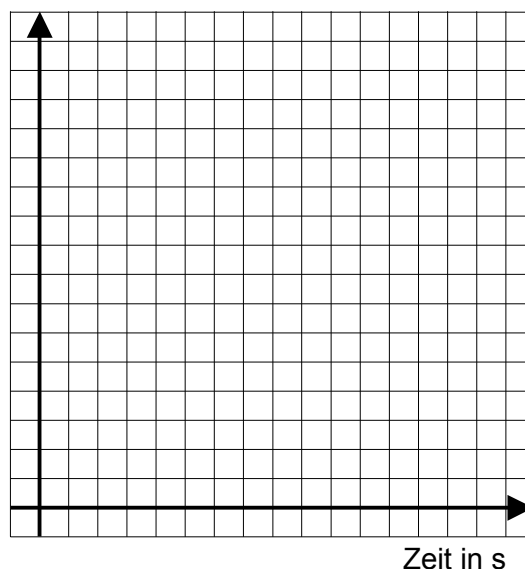
Einstiegsaufgabe

Von zwei Fahrzeugen wurden die Zeiten gemessen, die sie zum Durchfahren bestimmter Strecken benötigten. Die Fahrzeuge haben sich gleichförmig bewegt.

	Zeit in s	1	2	3	4	5	8
Fahrzeug 1	Weg in m	7	14		28	35	
Fahrzeug 2	Weg in m	9		27	36		72

1. Trage die Werte in das nebenstehende Diagramm ein und ergänze zu Graphen!
2. Ergänze die fehlenden Werte in der Tabelle!
3. Welche Aussagen kann man zu dem Verlauf der Graphen machen?
4. Welchen Weg haben die jeweiligen Fahrzeuge nach 12 s, 20 s und 50 s zurückgelegt, wenn sie ihre Bewegungsart beibehalten?
5. Welche Kontrollmöglichkeiten gibt es für deine Berechnungen?
6. Ein 3. Fahrzeug hat die doppelte Geschwindigkeit des Fahrzeugs 2. Was kannst du über den zurückgelegten Weg aussagen?

Weg in



Übungsaufgaben

1. Überprüfe, ob die folgenden Zuordnungen direkt proportional sind!

Stück	Preis in €
2	3
10	15

Stück	Preis in €
3	1,50
12	6,00

Stück	Preis in €
2	1,80
6	3,60

Stück	Preis in €
21	14,00
3	2,50

2. Für sechs Filzstifte muss Lisa im Schreibwarengeschäft 2,40 € bezahlen. Daniel möchte drei Filzstifte kaufen, Julia zwei, Klaus vier, Andre acht und Sarah neun. Lege eine Tabelle an und berechne die fehlenden Preise.
3. Fünf Kubikzentimeter Gold haben eine Masse von 96,6 g.
- Welche Masse haben goldene Kugeln von 12 cm^3 (37 cm^3 , 119 cm^3) Volumen?
 - Welche Masse hat ein quaderförmiger Goldbarren mit einer Höhe von 3 cm, einer Breite von 4 cm und einer Länge von 5 cm?
 - Ein Ring mit einem Volumen von $2,56 \text{ cm}^3$ hat eine Masse von 49,5 g, ein anderer Ring hat eine Masse von 63,2 g und ein Volumen von $4,2 \text{ cm}^3$. Welcher Ring ist aus Gold?
4. Suche aus den folgenden Angeboten das jeweils günstigste Angebot heraus.

Frischemarkt

250 g Würstchen	0,99 €
150 g Joghurt	0,22 €
24 x 0,5 l Selters	4,00 €

Euro-Markt

720 g Würstchen	2,92 €
200 g Joghurt	0,32 €
12 x 0,7 l Selters	2,80 €

5. Frau Heine tankt an einer Tankstelle .
- Trage das Zahlenpaar als Punkt in ein Koordinatensystem ein.
 - Zeichne die Gerade durch diesen Punkt und den Ursprung und bestimme anhand der Geraden, wie teuer 20l (10 l, 15 l, 35 l, 40 l, 45 l) sind.
 - Trage die Ergebnisse in eine Tabelle ein.



6. Für das Sportabzeichen muss Tino 1000 m in 4 min 30 s laufen. Welche Zeit hat er durchschnittlich für eine Runde (400 m) zur Verfügung? Rechne vorteilhaft!
7. Toni möchte wissen, welche Freunde er mit seinem CB-Funkgerät erreichen könnte, das eine Reichweite von 6,4 km hat. Dazu will Toni auf einem Stadtplan den entsprechenden Kreis um seinen Wohnort zeichnen. Wie groß muss der Radius sein, wenn 15 cm auf dem Stadtplan einer Strecke von 3 km entsprechen?

3. Unterrichtseinheit: Indirekte Proportionalität

Zielstellung

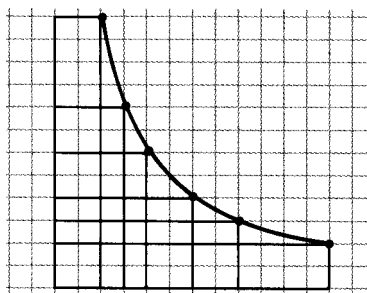
Erarbeiten der Eigenschaften der indirekten Proportionalität:

- Zwei Zahlen bzw. Größen stehen in einem umgekehrten Verhältnis (Je mehr ..., um so weniger ...).
- Zugeordnete Zahlen bzw. Größen sind produktgleich.
- Graph ist eine Kurve (Hyperbel); keine Gerade
- Lösen von Aufgaben durch inhaltliche Überlegungen, Produktgleichung, Dreisatz oder Nutzen von grafischen Darstellungen.

Die Einführungsstunde könnte mit einem Arbeitsblatt (s. Variante 2) begonnen werden. Dies sollte von den Schülerinnen und Schülern möglichst selbstständig bearbeitet werden. Sollten leistungsschwache Klassen damit überfordert sein, könnte man Variante 1 wählen.

Einstiegsaufgabe – Variante 1

Schneide aus kariertem Papier möglichst viele Rechtecke mit 24 gleichen Karos. Von jeder Sorte sollen 2 Stück vorkommen. Lege sie wie in dem vorgegebenen Bild auf kariertes Papier und verbinde die Ecken rechts oben.



Erstelle eine Tabelle!

Länge								
Breite								

Hinweis auf Produktgleichheit!

Ergänze den folgenden Satz!

Je größer Seite a, um so ... ist Seite b.

Die Auswertung sollte so angelegt werden, dass man zu den Erkenntnissen entsprechend dem Arbeitsblatt gelangt.

Variante 2

Arbeitsblatt: Indirekte Proportionalität

Ein Rechteck hat einen Flächeninhalt von 24 cm^2 ($A = a \cdot b$).

Welche ganzzahligen Seitenlängen sind für dieses Rechteck möglich?

a) Ergänze dazu die folgende Tabelle!

a in cm								
b in cm								

b) Wie könntest du deine Ergebnisse kontrollieren?

.....

c) Stelle die Seitenlängen in einem Koordinatensystem dar! Beschreibe den Verlauf der grafischen Darstellung!

d) Ergänze!

Je länger Seite a ist, um so ist Seite b.

Je kürzer Seite a ist, um so ist Seite b.

Wenn man Seite a halbiert, sich Seite b.

Verdreifacht man Seite b, so sich Seite a.

Merke: Zugeordnete Zahlen bzw. Größen sind produktgleich. Der Graph ist eine Kurve(Hyperbel).

Sachaufgaben:

1. Der Futtermittelvorrat für 16 Tiere reicht 10 Tage. Wie lange reicht der Vorrat bei 32 (8) Tieren?

2. Ein Tank soll gefüllt werden. 5 Pumpen benötigen 16 Stunden. Ergänze die Tabelle!

Anzahl der Pumpen	5	4			40	
Stunden	16		10	15		8

3. Zur Erstellung des Rohbaus eines Einfamilienhauses benötigen 6 Arbeiter 30 Tage.

a) Wie lange brauchen 4(3; 5; 9; 10; 12) Arbeiter?

b) Die Arbeit soll in 20 (45) Tagen beendet sein.

4. Unterrichtseinheit: Übungen zur indirekten Proportionalität

Zielstellung

Festigung der erworbenen Kenntnisse durch vielfältige Übungsaufgaben.

Der Schwierigkeitsgrad und die jeweilige Methode richten sich nach dem Wissensstand der Schülerinnen und Schüler. Ein differenziertes Arbeiten ist in den Übungsstunden unbedingt erforderlich.

Aufgabenauswahl

1. Ergänze die folgenden Tabellen! Schreibe zu einer Tabelle eine Textaufgabe!

Bagger	Tage
3	24
	18
2	

Pumpen	Stunden
5	16
4	
	10

Zeit	Geschw.
6 h	90 km/h
10h	
	30 km/h

2. Eine Pumpe füllt ein Wasserbecken in 2,5 Stunden, wenn sie in jeder Minute 40 Liter fördert.
Das Becken soll in 2 Stunden gefüllt sein. Wie viel Liter muss eine zweite Pumpe in jeder Minute fördern?
3. Ein Pkw fährt mit einer Tankfüllung von 72 l 600 km weit. Wie viel km kann man fahren, wenn das Fahrzeug auf 100 km 10,8 l braucht?
4. Karin holt von der Bank 30 Münzen zu je 2 €. Wie viele 1-Euro-Münzen hätte sie bei dem gleichen Geldbetrag erhalten?
5. Der Fußboden eines Hausflures soll erneuert werden. Bisher ist er mit 400 quadratischen Fliesen der Seitenlänge 15 cm ausgelegt. Wie viele Fliesen braucht man mindestens, wenn quadratische Fliesen der Länge 30 cm verlegt werden?
6. Von Bad Lauchstädt bis Berlin beträgt die kürzeste Fahrtstrecke etwa 180 km.
- a) Berechne die Zeit (t), die ein Fahrzeug mit der in der Tabelle angegebenen Durchschnittsgeschwindigkeit (v) für diese Strecke jeweils benötigt.

v in km/h	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
t in h												

- b) Stelle die Zuordnung in einem Koordinatensystem dar. Trage auf der x-Achse die Geschwindigkeiten ab. Teile die Achse so, dass 1 cm einer Geschwindigkeit von 10 km/h entspricht. Trage auf der y-Achse die Zeiten ab. Teile diese Achse so, dass 1 cm einer Zeit von 1h entspricht.
- c) Entnimm dem Diagramm die in der folgenden Tabelle fehlenden Werte:

v in km/h	25	36	45			144
t in h				3,6	2,5	

- d) Wie hängt die Fahrzeit für die Strecke Bad Lauchstädt – Berlin von der Durchschnittsgeschwindigkeit des Fahrzeugs ab?

5. Unterrichtseinheit: Vermischte Übungen zu Zuordnungen

Zielstellung

- Vielfältige Übungen zu allgemeinen Zuordnungen, direkter und indirekter Proportionalität
- Die Schülerinnen und Schüler sollen die jeweilige Form selbstständig erkennen und ihre erworbenen Kenntnisse anwenden.

Übungsaufgaben

1. Die Klassen 6 a und 6 b wollen eine mehrtägige Klassenfahrt machen. Die Kosten für den Bus betragen pro Person 34 €. Was kostet die Fahrt pro Person, wenn nicht wie vorgesehen 54, sondern nur 51 Personen an der Klassenfahrt teilnehmen können?
Um wie viel Prozent hat sich der Fahrpreis geändert?

2. Kreuze an!

Beispiel	direkt proportional	indirekt proportional	andere Zuordnung
Länge eines Rechtecks → Breite bei gleichem Flächeninhalt			
Größe eines Körpers → Masse des Körpers			
Wegstrecke → Benzinverbrauch			
Anzahl der Monate → Stromverbrauch			
Anzahl Stockwerke → Haushöhe			
Fiebertemperatur → Uhrzeit			
Länge in Wirklichkeit → Länge in der Zeichnung			
Zahl der Fahrzeuge → abtransportierte Menge			
Grundwert → Prozentwert			
Luftfeuchtigkeit → Uhrzeit			

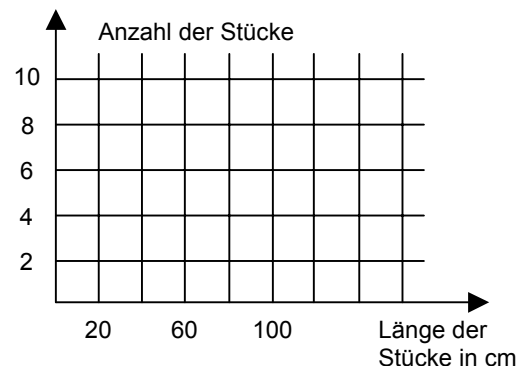
3. Zwei Eier brauchen 10 Minuten, bis sie hartgekocht sind. Wie lange muss man (4; 7; 15) Eier kochen?
4. Ein Kirschbaum wächst in 2 Jahren um 70 cm. Jetzt ist er 2,80 m hoch. Nach wie viel Jahren ist er 50 m hoch?
5. Ein Arbeiter verdient in einer 40-Stunden Woche 380 €.
 - a) Wie viel Lohn erhält er, wenn er nur 36 Stunden arbeitet?
 - b) Wie viel Stunden hat er gearbeitet, wenn er 420 € Lohn erhält?
 - c) Wenn er mehr als 40 Stunden arbeitet, bekommt er für jede Überstunde 20 % Aufschlag. Wie viel Euro verdient er bei 43 Arbeitsstunden in einer Woche?
6. Ein Patient muss täglich 12 Tropfen einnehmen. Die Arznei reicht ihm dann 21 Tage. Nach 5 Tagen treten Beschwerden so auf, dass er nur noch 6 Tropfen täglich einnehmen darf. Wie viele Tage im Ganzen reicht ihm jetzt die Arznei?
7. Ein Supermarkt bietet ein Paket Waschmittel zu 2 kg für 3,60 € an. Ein anderes Geschäft verlangt für die 4,5 kg-Packung 8,50 €. Vergleiche die Angebote!

8. Radfahrer fährt in 4 Stunden 64 km (gleichförmige Bewegung).
- Zeichne den zur Zuordnung gehörenden Graphen. Wähle 1 cm für 0,5 h und 1 cm für 5 km. Ermittle anhand des Graphen, wie viele Kilometer der Radfahrer in 3 h (2,5 h; 4,5 h) zurücklegt.
 - Ermittle anhand des Graphen, wie lange er für eine Strecke von 12 km (24 km; 60 km) benötigt?
9. Das Auto der Familie Naumann kostet 16000 €. Die Hälfte des Kaufpreises haben sie sofort beim Autokauf bezahlt, den Restbetrag wollen sie in monatlichen Raten zurückzahlen.

Wie hoch sind die monatlichen Raten (ohne Zinsen), wenn der Kredit in 24 Monaten, 30 Monaten, 36 Monaten oder 48 Monaten zurückgezahlt werden soll?

10. Ein 2,40 m langes Band soll in gleich lange Stücke zerschnitten werden.

Länge der gleich langen Stücke in cm	120		40	
Anzahl der Stücke		4		8



- Ergänze die Tabelle!
 - Stelle den Zusammenhang grafisch dar!
 - Welcher Zusammenhang liegt vor? Begründe!
11. Frau Meier bezahlt 0,96 € für 6 Eier.
- Wie viel Euro kosten 10 Eier?
 - Wie viele Eier bekommt man für 3,84 €?
12. Zum Verpacken einer Lieferung benötigen 10 Packerinnen 24 Stunden.
Wie viele Stunden benötigen 8 Packerinnen?
13. Aus 10 kg Pflaumen erhält man 6 kg Pflaumenmus. Margit möchte 20 Gläser Pflaumenmus mit je 450 g Inhalt einkochen. Wie viel kg Pflaumen benötigt sie?
14. Nach dem Einfüllen von 20 Litern steht das Wasser im Aquarium 12 cm hoch.
Wie viel Liter enthält das Aquarium bei einer Wasserhöhe von 45 cm?

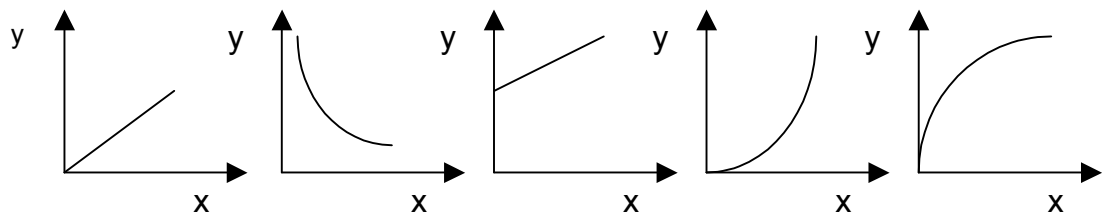
15. Manuela und Carsten bestimmen Masse und Volumen einiger Gegenstände aus verschiedenen Metallen.

- a) Bei der Untersuchung von 3 Gegenständen aus Kupfer erhalten sie folgende Werte. Überprüfe, ob die Masse des Kupfers zum Volumen proportional ist.

Volumen	8 cm ³	12 cm ³	21 cm ³
Masse	71 g	107 g	187 g

- b) Für eine Kugel aus Kupfer messen sie ein Volumen von 16 cm³ und eine Masse von 88 g. Kann diese Messung richtig sein?

16. Welche Zuordnung könnten vorliegen?



3.2 Vorschläge zur Gestaltung von Einführungsstunden

Um die Aufgabe des Moduls 5 (Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen – kumulatives Lernen) in unterrichtserprobte Materialien für die Hand der Lehrkraft umzusetzen, sollen mehrere Varianten, Einführungsstunden in das Thema Funktionen in der 8. Klasse zu gestalten, vorgelegt werden.

Im Folgenden werden Vorschläge dargelegt, die auf der Erkenntnis aufbauen, dass die Schülerinnen und Schüler effektiver lernen, wenn sie in hohem Maße in das Unterrichtsgeschehen eingebunden werden. Dazu werden sie an der Schaffung einer Ausgangssituation unmittelbar beteiligt, die gleichzeitig das vorhandene Wissen reaktiviert.

Ziel aller Varianten: Die Schülerinnen und Schüler sind in der Lage, Zuordnungen zu bilden. Sie können identifizieren, ob eine Zuordnung eindeutig oder sogar eineindeutig ist. Die Schülerinnen und Schüler wissen, dass Funktionen eindeutige Zuordnungen sind und kennen Beispiele für Funktionen aus der Mathematik und der Erfahrungswelt.

Die in Klasse 8 zu vermittelnden Kenntnisse bezüglich der Funktionen haben einen hohen Stellenwert für die SJG 9 und 10, da auf allgemein zutreffende Eigenschaften und Begriffe, wie

- Definitionsbereich (Argumente)
- Wertebereich (Funktionswerte)
- Monotonieverhalten
- besondere Punkte (S_x ; S_y)
- Nullstelle
- Einfluss von Parametern auf den Verlauf der Graphen von Funktionen
- verschiedene Darstellungsformen (und deren Ineinanderüberführung)

aufgebaut wird.

Variante 1: Arbeit an Stationen

Der dargestellte Stationsbetrieb dient der Wiederholung der vermittelten Zusammenhänge über Zuordnungen, deren Darstellungsmöglichkeiten und ihren Anwendungen.
Nach dem Durchlauf aller Stationen können Beispiele zur Definition des Funktionsbegriffes verwendet werden.

Für die vier Stationen sollten mindestens drei Unterrichtsstunden eingeplant werden. Das experimentelle Arbeiten an Station 2 erfordert für die jeweilige Gruppe eine längere zusammenhängende Arbeitszeit bis zu 45 Minuten.

Es sollte überlegt werden, ob alle Schülergruppen alle Stationen durchlaufen (Differenzierungsmöglichkeit).

Station 1: Zuordnungen und ihre Darstellungsformen

1. Im Alltag treten oft Zuordnungen auf, z. B. bei der Bahn: Entfernung → Fahrzeit
Nenne weitere Beispiele.

Begründe kurz, warum es sinnvoll ist, diese Zuordnungen zu untersuchen.

2. Um eine Zuordnung zu beschreiben, gibt es verschiedene Möglichkeiten, z. B. Tabelle
.....
Nenne weitere:
Wähle eines deiner Beispiele und versuche es in allen Varianten, die du genannt hast, darzustellen.

3. Vielleicht versuchst du erst diese Aufgabe.
An der Elbe in Dresden wird regelmäßig 12 Uhr der Wasserstand (Pegel) gemessen.
Für diese Woche sieht das Protokoll so aus:

Tag	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag	Samstag	Sonntag	Montag
Wasserstand in m	1,5	1,5	1,3	1,1	1,0	1,0	1,1	1,2

Wähle eine andere Darstellungsform.
Jetzt kannst du die Aufgabe 2 sicher bearbeiten.

Station 2: Aufnahme vom Messwerten und grafische Darstellung

An dieser Station findest du verschiedene Experiment aufgebaut. Einige kennst du vielleicht schon, eventuell sind auch einige neu für dich.

Wähle zwei Experimente aus und führe sie durch.

Für alle hast du folgenden Auftrag:

Führe mindestens acht Messungen aus und stelle die Ergebnisse tabellarisch und grafisch in einem Diagramm dar.

Formuliere Aussagen, die sich aus den Daten ergeben.

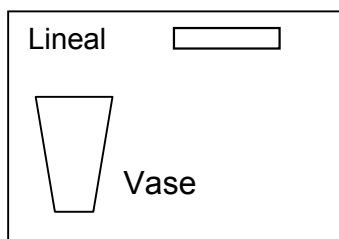
Methodische Anmerkung:

Die Experiment können sehr unterschiedlich sein.

Die Schülerin/der Schüler sollte z. B. auf einer Karteikarte Folgendes vorfinden:

- Name des Experiment
- Beschreibung des Aufbaus mit Benennung der zu benutzenden Bausteine
- Benennung der zu messenden Größen
- besondere Hinweise auf Fehler- oder Gefahrenquellen

Beispiel 1: Aufnahme einer Füllkurve

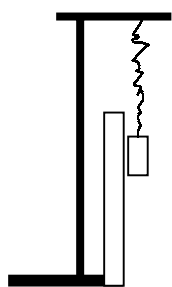


Fülle jeweils eine bestimmte Menge Wasser z. B. 50 ml in die Vase.

Miss den Wasserstand in dem Gefäß.

Achte darauf, dass das Lineal nicht verrutscht.

Beispiel 2: Hooke'sches Gesetz



Baue die Experimentieranordnung gemäß der Abbildung nach. Benutze die vor dir liegenden Stativstäbe und Kreuzmuffen, die Feder und die Hakenkörper

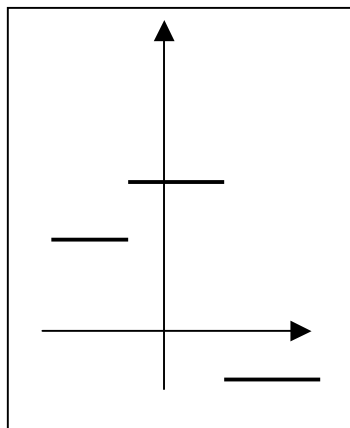
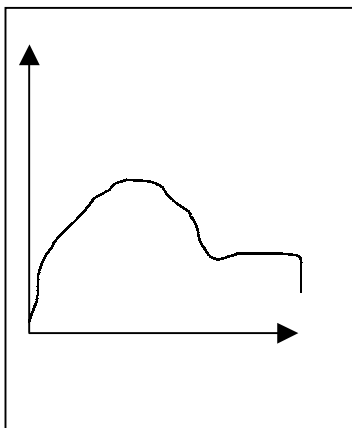
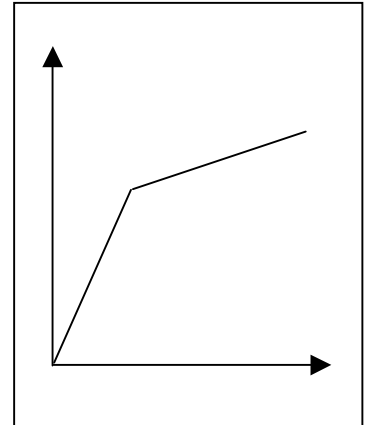
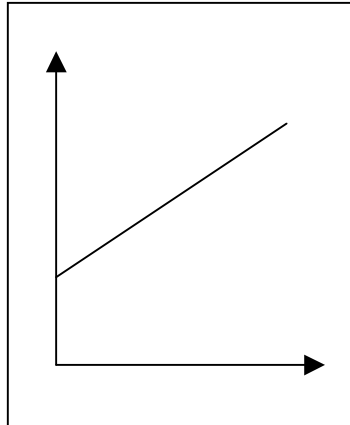
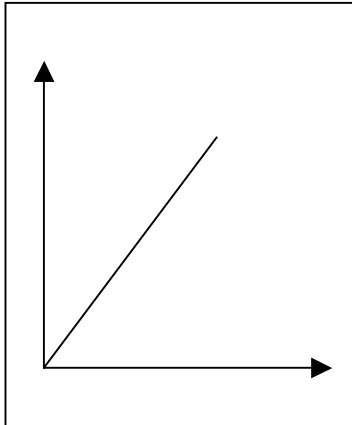
Verforme die Feder durch verschiedene Hakenkörper, notiere dir deren Gewichtskraft.

Miss die Längenänderung der Feder.

Beachte, dass du die Feder nicht überdehnst. Frage die Lehrkraft, welche maximale Kraft du einwirken lassen darfst.

Station 3: Grafische Darstellungen

1. Stelle folgende Zuordnungen grafisch dar.
 - Preis von n Flaschen Cola, wenn eine Flasche 2,50 € kostet
 - Im Monat Januar wird jedem Tag seine Durchschnittstemperatur zugeordnet.
 - Jeder rationalen Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.
2. Welche Zuordnungen könnten folgende Graphen beschreiben? Begründe deine Antwort.



Station 4: Gemischtes

1. Mutti will immer schon vorher wissen, wie hoch ihre Telefonrechnung ist. Eines Tages sagt sie: Stelle mir doch bitte etwas zusammen, woran ich sofort ablesen kann, wie viel ich bezahlen muss. Unser Telefon zeigt zwar die Einheiten an, aber nicht den Preis.
Nimm an, dass eure Telefongesellschaft eine monatliche Grundgebühr von 27,00 € und 5,9 Cent pro Einheit verlangt.
Erfülle nun Muttis Bitte.
2. Eine 80 cm hohe zylinderförmige Regentonne wird bei gleichmäßigem Zulauf gefüllt. Nach drei Minuten steht das Wasser 25 cm hoch.
Sage voraus, nach wie viel Minuten die Tonne überläuft. Begründe.
3. Ein Rennfahrer fährt im Training die 50 km lange Teststrecke mit durchschnittlich $50 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, zwei Stunden später startet ein Motorradfahrer auf dieser Strecke.
Seine Durchschnittsgeschwindigkeit beträgt $90 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
Wann überholt der Motorradfahrer den Rennradfahrer?
Schaffst du, es auf zwei verschiedenen Wegen deine Antwort zu begründen?
4. So jetzt bist du die Lehrkraft.
Denk dir selbst eine ähnliche Aufgabe aus.
Sicher findest du ein Problem, dass dich und deine Mitschülerinnen und Mitschüler interessieren könnte.
Solltest du Fragen z. B. zu Größen, die zu dem Sachverhalt passen, haben, helfe ich dir gern.

Variante 2: Nutzung fachübergreifender Lerninhalte (Physik)

Einführung in die Stoffeinheit „Lineare Funktionen“

- vorbereitende Hausaufgabe

1. Temperaturmessung der Luft (1 Woche lang zu einer bestimmten Zeit)
2. Bestimmung der eigenen Körpergröße

- Stundenverlauf

1. Darstellung der gemessenen Temperaturen im Temperatur-Zeit-Diagramm (Lehrkraft nimmt an der Tafel eigene Werte oder die einer Schülerin/eines Schülers)

2. DE Modelleisenbahn – Aufnahme des Weg-Zeit-Diagramms

Versuch wird gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern geplant und durchgeführt (Vorüberlegungen zum Versuch, Berechnung des Weges, 1 Schülerin/1 Schüler stoppt die Zeit, 1 weitere Schülerin/ein weiterer Schüler schreibt die ermittelten Werte an die Tafel)

Das Diagramm wird weitestgehend selbstständig von den Schülerinnen und Schülern gezeichnet.

3. Auswahl von 7-8 Schülerinnen und Schülern

- Befragung zur Körpergröße
- Darstellung nur als Tabelle

4. Unterrichtsgespräch

Welche Gemeinsamkeiten können wir feststellen?

Mögliche erste Arbeitsdefinition:

Allen Elementen einer 1. Menge wird ein Element einer 2. Menge zugeordnet.

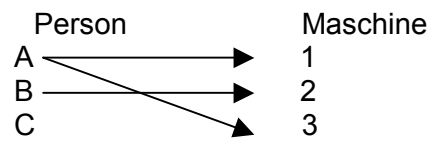
5. Erarbeiten der Definition und der Begriffe (LV + UG)

- Anhand der Beispiele und der ersten Arbeitsdefinition wird von der Lehrkraft der Begriff der eindeutigen Zuordnung gebracht, und daraus resultierend der Begriff der Funktion
- Frage der Lehrkraft:
Ich vertausche die Mengen bei allen 3 Beispielen. Handelt es sich dann immer noch um Funktionen? (UG)
Hinweis: Es sollte sich natürlich nicht bei allen 3 Beispielen um eineindeutige Funktionen handeln!
- Definition: Eine Funktion ist eine eindeutige Zuordnung von Elementen einer Menge X zu Elementen einer Menge Y
Elemente der Menge X: Argumente
Menge aller Argumente: Definitionsbereich
Elemente der Menge Y: Funktionswerte
Menge aller Funktionswerte: Wertebereich

6. Zusammenfassung

- Begriffe und Definition auf Beispiele anwenden
- Zuordnung (3 Personen, 3 Maschinen)

Welche Person kann welche Maschine bedienen?



→ keine Funktion

Begründung:

1. Nicht jedem Element der ersten Menge wird ein Element der zweiten Menge zugeordnet.
2. Es ist keine eindeutige Zuordnung.

Variante 3: Nutzung der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler

Bei dieser Variante geht es um die Wiederholung der Merkmale von Zuordnungen und das Einführen des Begriffes Eindeutigkeit. Ziel ist es, die Funktionsdefinition vorzubereiten.

Die anfänglich leicht erscheinende Aufgabenstellung fördert die Aufmerksamkeit der Schülerinnen und Schüler über deren Identifizierung mit der Problematik. Dies erleichtert die anspruchsvollere Einführung der Eindeutigkeit von Zuordnungen.

Ablauf der Stunde

Stundenabschnitt	L	S
Wiederholung des Zuordnungsbegriffes		nennen Zuordnungen aus ihrer Erfahrungswelt sowie DB und WB
Einführung des Begriffes der Eindeutigkeit		
Sammeln von Ideen	- stellt Preisliste eines Imbissstandes vor (Folie) „Stellt Möglichkeiten zusammen, 5 € an einem Imbissstand mit folgendem Angebot bis auf den letzten Cent auszugeben.“	gehen zur Tafel und schreiben mögliche Bestellungen an (gruppiert um einen 5 €-Schein)
Ergebnissicherung		erkennen die Problematik mehrerer existierender Möglichkeiten
Hinführung	fordert die Schülerinnen und Schüler auf, Möglichkeiten zu nennen, damit die Mehrdeutigkeiten ausgeschlossen werden	„Das Angebot muss verändert werden.“ „Man muss genau sagen was man möchte“ „Wenn man ein Essen mit Beilage und ein Getränk möchte, gibt es nur noch eine Möglichkeit.“
	- hebt die genannten Bedingungen als Zuordnungsvorschriften hervor und definiert den Begriff der Eindeutigkeit - definiert die Funktion als eindeutige Zuordnung	
Übungsphase		nennen weitere eindeutige Zuordnungsvorschriften

Imbiss am Park

Angebot

Cola 1,50
Wasser 1,20
Kaffee 2,00

Schaschlik 2,50
Schnitzel 3,50
Currywurst 3,50

Twix 1,00
Mars 1,00
Kaugummi 0,20

Pommes groß 2,00
Pommes klein 1,30
Kartoffelsalat 2,00

Alternativ ist das Sammeln von Ideen auch mit Hilfe von Hafttafeln möglich. In der Vorbereitung oder auch durch die Schülerinnen und Schüler selbst werden die Artikel aus dem Angebot mit Preisen auf Hafttafeln geklebt. Bewährt haben sich mit Tafellack gestrichene Papptafeln, deren Rückseiten mit Magnitumstreifen beklebt sind. Es sollten Waren aus der Erfahrungswelt der Schülerinnen und Schüler sein.

Weitere Ideen könnten sein:

- Zuordnung von Termen zu einem gegebenen Aufgabenraster (Welche Terme muss man addieren um 6,25 t herauszubekommen ?)
- Zuordnung von Formeln zu gegebenen Flächen bzw. Körpern
- Zuordnung von Pausenwerten zu Notenwerten in der Musik
- Zuordnung von Hauptstädten zu Ländern Europas

3.3 Aufgaben zur Erstfestigung des Begriffs „Funktion“

1. Welche Zuordnungen sind Funktionen? Begründe deine Antwort!

- a) Anzahl der Arbeitsstunden → Lohn
- b) Seitenlänge eines Quadrates → Umfang des Quadrates
- c) Heizdauer → Wassertemperatur
- d) Umfang eines Rechtecks → Seitenlänge eines Rechtecks
- e) Fahrkartenpreis → Bahnkilometer
- f) Bahnkilometer → Fahrkartenpreis
- g) Zahl → Doppelte der Zahl
- h) Körpergröße → Körpermasse
- i) Parkdauer → Parkgebühr
- j) Parkgebühr → Parkdauer
- k) Ort → Postleitzahl
- l) Postleitzahl → Ort

2. Welche Zuordnungen in den Tabellen stellen keine Funktion dar? Begründe!

a)

1. Größe	2	3	4	5	7	10	12
2. Größe	10	9	6	5	9	2	12

b)

1. Größe	8	10	9	7	6	5
2. Größe	8	9	10	11	12	13

c)

1. Größe	65	31	54	78	65	94
2. Größe	7	1	2,5	1	3	14

d)

1. Größe	1,8	2,4	2,8	2,6	2,4	1,8
2. Größe	0,3	0,9	1,5	2,1	2,0	1,8

e)

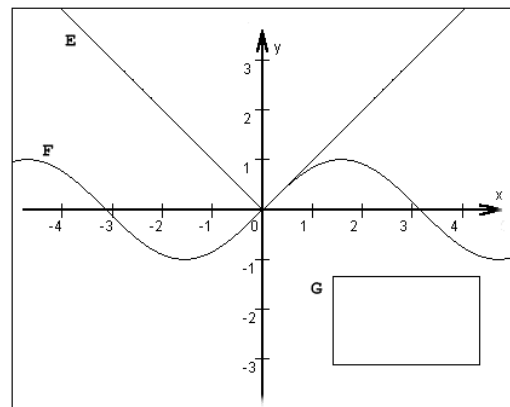
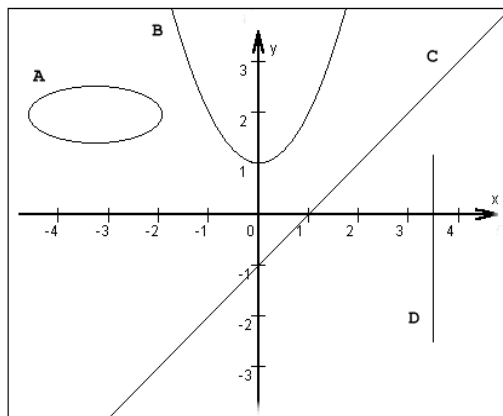
1. Größe	1	2	3	4	5	6
2. Größe	-3	-4	-3	0	5	12

3. Bei einem Schülerexperiment wurde folgendes Messprotokoll aufgenommen:

U in Volt	2	4	6	8	10
I in mA	20	40	60	80	100

- a) Übertrage die Messwerte in ein Koordinatensystem!
- b) Überprüfe, ob eine Funktion vorliegt!

4. Stellt die Menge der geordneten Zahlenpaare eine Funktion dar?
- $M = \{[4;6], [8;12], [1;2], [4;7]\}$
 - Menge aller $[x;y]$ mit $x \in \mathbb{N}$ und $y \in \mathbb{N}$ und $x + y = 6$
 - Menge aller $[x;y]$ mit $x \in \mathbb{Q}$ und $y = 7x + 3$
 - Menge aller $[x;y]$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y \in \mathbb{N}$ und $y \leq x$
 - Menge aller $[x;y]$ mit $x \in \mathbb{N}$ und dem Wert y , der die Quadratwurzel der 2. Potenz von x ist.
5. Ein Dreieck ABC wird an einer Geraden gespiegelt. Dabei entsteht das Bilddreieck A'B'C'. Ist diese Abbildung eine Funktion?
6. Welche Zuordnung ist eine Funktion?
- Zu jeder Halbjahresnote in Mathematik gehört eine Schülerin/ein Schüler.
 - Zu jeder Schülerin/jedem Schüler gehört eine Halbjahresnote in Mathematik
7. Bei welchen der Graphen A bis G handelt es sich um Funktionsgraphen?



4 Aufgabenbeispiele zum Thema „Lineare Funktionen“

4.1 Zur Einstiegsphase

Die Einstiegsphase zu linearen Funktionen kann relativ kurz gehalten werden, da bereits in den vorangegangenen Stunden ausführlich mit dem allgemeinen Funktionsbegriff gearbeitet wurde. Der Einstieg bezieht sich auf die Erarbeitung der Funktionsgleichung $y = mx + n$ bzw. $y = mx$.

Es werden drei verschiedene Einstiegsaufgaben angeboten, die man je nach der Klassensituation auswählen kann.

1. Einstiegsaufgabe

- a) Schnecke Olli kriecht mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1,2 m/min.



Stelle den Zusammenhang zwischen Weg und Zeit für die ersten fünf Minuten in einem Diagramm dar!
Lege dir dazu eine Wertetabelle an!

- b) Schnecke Benni hat bereits einen Weg von 2 m zurückgelegt und bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit wie Schnecke Olli.



Stelle den Zusammenhang zwischen Weg und Zeit auch für Benni grafisch im gleichen Diagramm dar.
Stelle auch hierzu eine Wertetabelle auf!

- c) Vergleiche die beiden Graphen. Was fällt dir auf?

2. Einstiegsaufgabe

- a) 2 m³ Sand wiegen 4 Tonnen.
Finde eine Gleichung für die Zuordnung Volumen → Masse. Zeichne den Graphen!
- b) Ein Lastwagenanhänger wiegt leer 2,5 Tonnen und wird mit Sand beladen. Zeichne in dasselbe Koordinatensystem den Graphen für die Zuordnung Sandvolumen → Gesamtmasse des Anhängers.
- c) Vergleiche die Graphen der beiden Zuordnungen.

3. Einstiegsaufgabe

Das Verkehrsschild befindet sich an einer Bergstraße



- a) Was bedeutet die Angabe auf dem Schild?
- b) Stelle den Zusammenhang zwischen horizontaler Länge und Höhenunterschied graphisch dar.
- c) Wie würde sich der Verlauf des Graphen ändern, wenn die Angabe auf dem Schild 6 % betragen würde?

Nach Bearbeitung der jeweiligen Aufgabe sind die Schülerinnen und Schüler zu folgenden Erkenntnissen zu führen:

Eine Funktion mit der Gleichung $y = mx + n$ heißt lineare Funktion. Der Graph ist eine Gerade. „m“ heißt Anstieg der Funktion und „n“ gibt den Achsenabschnitt auf der y-Achse an.

In den weiteren Unterrichtsstunden sollen den Schülerinnen und Schülern sichere Kenntnisse zu folgende Sachverhalten vermittelt werden:

- Definitionsbereich
- Wertebereich
- Darstellungsformen
- Sonderfälle: $y = mx \rightarrow$ Gerade durch den Koordinatenursprung
 $y = n \rightarrow$ Parallele zur x-Achse
- Nullstelle einer linearen Funktion
- Monotonieverhalten
- Einfluss von „m“ und „n“ auf den Verlauf des Graphen

4.2 Aufgaben zur Funktionsdarstellung und zur Anwendung

1. Gegeben ist die folgende Funktionsgleichung: $y = 2x - 1$ ($x \in \mathbb{R}$)
 Zeichne den Graphen der Funktion!

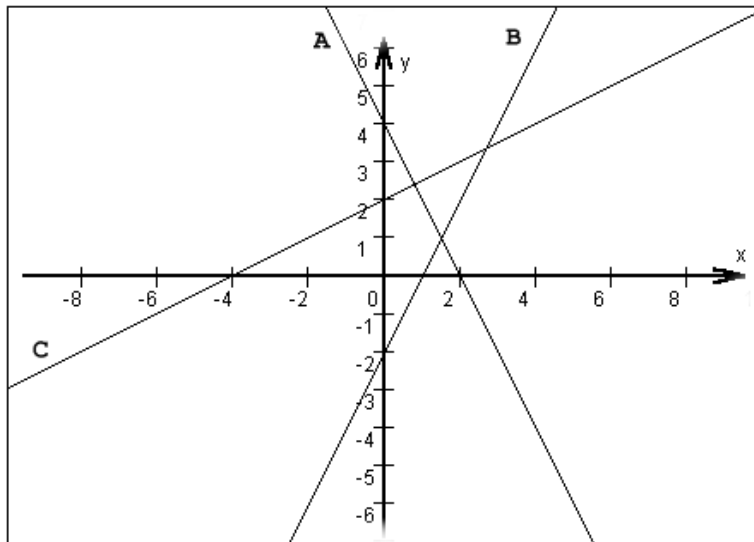
2. Gegeben ist eine Wertetabelle einer linearen Funktion.

x	-2	0		3,5		7
y	6	4	3		-1	

- a) Trage die Wertepaare in ein rechtwinkliges Koordinatensystem in dein Heft ein.
 Zeichne durch diese Punkte eine Gerade g. Ergänze die Wertetabelle!
 Bestimme die Funktionsgleichung!
- b) Eine zweite Gerade h ist der Graph der Funktion $y = x + 6$ ($x \in \mathbb{R}$).
 Zeichne die Gerade h in dasselbe Koordinatensystem.
- c) Der Schnittpunkt beider Geraden sei S. Gib die Koordinaten von S an.
3. Gegeben sind die linearen Funktionen $f_1 = y = 3x + 2$ und $f_2 = y = 2x - 2$ ($x \in \mathbb{R}$).
 Welche der geordneten Paare gehören zu f_1 bzw. f_2 ?
 (0,25;-1,5) (0;2) (-2,1;-6,2) (-4;10) (1;1) (0;0)
4. Eine Schraubenfeder ist in unbelastetem Zustand 40 cm lang. Wenn man ein Massestück von 100 g anhängt, verlängert sie sich um 5 cm.
 - a) Stelle die Funktion **Belastung** $\rightarrow$ **Federlänge** bis zu einer Federlänge von 80 cm grafisch dar!
 - b) Gib die Funktionsgleichung an!
5. Bestimme die Funktionsgleichung der Geraden, wenn der Schnittpunkt N mit der x-Achse und ein weiterer Punkt gegeben sind: N(2;0); A(4;2).

6. Gegeben ist die Funktion $y = -\frac{1}{4}x + 1$. ($x \in \mathbb{R}$)
- Zeichne den Graph im Intervall von $-5 \leq x \leq 2$!
 - Kennzeichne im Koordinatensystem den Punkt $R(0;-2)$.
 - Zeichne eine parallele Funktion zu $y = -\frac{1}{4}x + 1$, die durch den Punkt R verläuft!
Gib die entsprechende Funktionsgleichung an!
 - Nenne eine Funktionsgleichung, die die y -Achse im gleichen Punkt schneidet, wie die Funktion $y = -\frac{1}{4}x + 1$!

7. Ermittle die Funktionsgleichung aus der grafischen Darstellung!



8. Mobil telefonieren wird immer beliebter. Ich habe mich nach den Kosten erkundigt. Es herrscht ein wahrer Tarifdschungel. Zwei Tarife haben mir gefallen.
(Details aus Copyrightgründen leicht geändert):

(I) Time & Money von O-Minus

Monatliche Grundgebühr : 10,00 € (darin sind 15 Frei-Minuten bereits enthalten)
 Minutenpreis 8-18 Uhr : 0,50 €
 Minutenpreis 18-8 Uhr : 0,20 €

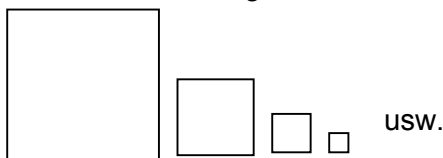
(II) Kelly von T-K3

Monatliche Grundgebühr : 12,50 €
 Minutenpreis 8-18 Uhr : 0,35 €
 Minutenpreis 18-8 Uhr : 0,15 €

- Stelle beide Tarife in einem Diagramm dar, für den Fall, dass nur in der Zeit von 8 bis 18 Uhr telefoniert wird. Wähle als Abszisse die monatliche Gesprächszeit in Minuten und als Ordinate die monatlichen Kosten.
- Ich telefoniere monatlich ca. 35 Minuten (8-18 Uhr). Welchen Tarif würdest du mir empfehlen ?
- Wann ist Tarif II günstiger, falls ich nur in der Freizeit (18-8 Uhr) telefoniere?

9. Stelle folgende Zuordnung graphisch dar und entscheide, ob eine Funktion vorliegt.

Ein Quadrat mit dem Flächeninhalt $A = 10000 \text{ m}^2$ soll in vier gleichgroße Teilquadrate zerlegt werden. Mit einem der Teilquadrate soll das Gleiche geschehen und so weiter. Der Anzahl der Teilungen soll der Flächeninhalt eines Teilquadrates zugeordnet werden.



10. Gegeben sind die folgenden Funktionen:

$$y = 3x$$

$$y = -2x + 2$$

$$y = 0,5x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

- Stelle für die folgenden Funktionen eine Wertetabelle auf!
- Zeichne die Graphen der Funktionen!
- Entscheide, ob die Funktionen steigend oder fallend sind!
- Bestimme die Nullstellen der Funktionen aus der grafischen Darstellung!
- Berechne die Nullstellen!
- Nenne eine Funktionsgleichung, deren Graph parallel zu $y = 3x$ verlaufen würde!
- Gehören die Punkte $R(4; -6)$ und $T(-3; 5)$ zu der Funktion $y = -2x + 2$? Begründe!

11. Gegeben sind die folgenden Wertetabellen mit den entsprechenden Funktionsgleichungen.

$$y = -1,5x \quad (x \in \mathbb{R})$$

x	-2	-1	0	1	3
y					

$$y = 3x - 2 \quad (x \in \mathbb{R})$$

x	-2	-1	0	1	3
y					

- Ergänze für beide Funktionen die Wertetabellen!
 - Stelle die beiden Funktionen in einem Koordinatensystem dar!
 - Entscheide, ob die Funktionen steigend oder fallend sind!
 - Gib für jede Funktion die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an!
12. Gegeben sind die linearen Funktionen mit den Gleichungen
 (1) $y = -x + 7$ und (2) $y = 3x + 3 \quad (x \in \mathbb{R})$.
- Zeichne die Graphen dieser Funktionen in ein Koordinatensystem.
 - Gib die Nullstellen der beiden Funktionen an!
 - Gib die Koordinaten des Schnittpunktes S der beiden Graphen an!
 - Die Geraden bilden mit der x-Achse ein Dreieck. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

13. Zu jeder Seitenlänge x eines Quadrates gehört ein bestimmter Umfang y .
Fülle die Wertetabelle aus!

x	1 cm	2 cm	3 cm	4 cm		
y					20 cm	24 cm

- a) Gib die Funktionsgleichung an!
- b) Fertige eine grafische Darstellung an!
(x -Achse $\rightarrow$ Seitenlänge; y -Achse $\rightarrow$ Umfang)
Beachte die ganzzahligen Werte der Seitenlängen!
14. Der PKW von Familie Friedrich verbraucht durchschnittlich im Stadtverkehr 9,5 l und auf Landstraßen 7,5 l Kraftstoff auf 100 km.
- a) Stelle den Verbrauch für eine Tagesstrecke von 100 km in einem Koordinatensystem dar, wenn 60 % der Strecke zuerst im Stadtverkehr zurückgelegt werden.
- b) Zeichne den Graphen für die Benzinkosten, wenn 10 l Benzin 10,20 € kosten.
15. Ein Elektrizitätswerk liefert Strom für Betriebe zu folgenden Bedingungen:

	Verbrauchspreis Cent/kWh	Fester Leistungspreis Euro/Jahr
Tarif 1	18	81
Tarif 2	13	275

- a) Stelle für beide Tarife Funktionsgleichungen für die Funktion **Verbrauch $\rightarrow$ Rechnungsbetrag** auf!
- b) Zeichne die zugehörigen Graphen
(x -Achse: 1cm entspricht 1000 kWh; y -Achse: 1cm entspricht 100 €):
- c) Lies ab, bei welchen Verbrauchshöhen ein Tarifwechsel günstig ist.

5 Aufgabenvielfalt zum Funktionsbegriff

5.1 Erläuterungsaufgaben

Der Mathematikunterricht ist in der Regel sehr verfahrensorientiert angelegt. Dies widerspiegelt sich auch in den üblichen Lehrbuchaufgaben. Meistens geht es darum, algorithmische oder kalkülmäßige Verfahren auf formale oder mehr anwendungsbezogene Aufgaben anzuwenden.

Aufgaben, mit denen man explizit Verständnis von Begriffen und Zusammenhängen üben bzw. überprüfen kann, treten kaum auf. Ein Erklären, Erläutern oder Begründen ist im Mathematikunterricht u. E. unterrepräsentiert, insbesondere bei schriftlichen Übungen bzw. Lernkontrollen.

Wir haben uns deshalb diesem Anliegen zugewandt. Der zugehörige Aufgabentyp soll im Folgenden als **Erläuterungsaufgaben** bezeichnet werden.

Um genauer Anforderungen zu bestimmen, werden oft die Signalworte **Erklären**, **Erläutern** und **Begründen** verwendet.

Vergleicht man Angaben zu diesen „Signalwörtern“ in verschiedener Fachliteratur sowie Festlegungen in den allgemeinen Prüfungsanforderungen unterschiedlichster Fächer stellt man erhebliche Unterschiede fest. Diskussionen bestätigen dies selbst zwischen Lehrkräften eines Faches und erst recht verschiedener Fächer.

Für die Schülerinnen und Schüler ergibt sich daraus häufig das Problem des Umdenkens von Fach zu Fach. Eine Abstimmung innerhalb einer Fachschaft, besser noch des Kollegiums, sehen wir deshalb als wünschenswert an.

In einer unserer Setschulen erfolgte eine solche Abstimmung zwischen den Kolleginnen und Kollegen zunächst einer Fachrichtung und schließlich für das gesamte Kollegium. An fachspezifischen Beispielen wurde die Erwartungshaltung der Fachschaft demonstriert und mit Lehrkräften verschiedener Fachrichtungen diskutiert. Es wurden Übereinstimmungen in den Anforderungsniveaus festgelegt.

Im Folgenden sind die Verabredungen aufgeführt, was jeweils mit den Signalwörtern „Begründen“, „Erläutern“ und „Erklären“ von den Schülerinnen und Schülern erwartet wird.

Begründen

Beim Begründen wird ein Nachweis geführt, dass eine Aussage richtig oder falsch ist. Dazu müssen Argumente angeführt werden, z. B. durch Bezug auf Gesetze, Eigenschaften oder Beobachtungen.

Erläutern

Beim Erläutern sollen wesentliche Zusammenhänge (z. B. Vorgänge, Erscheinungen, Gesetze, Begriffe) verständlicher, anschaulicher, begreifbarer gemacht werden. Dies geschieht häufig an Beispielen.

Erklären

Beim Erklären wird ein Sachverhalt zusammenhängend und geordnet dargestellt, z. B. auf Grund welcher Gesetzmäßigkeiten, Ursachen oder Bedingungen, Erscheinungen in Natur oder Gesellschaft bestehen. Einzelne Erscheinungen werden in einen Gesamtzusammenhang eingeordnet. Nicht selten werden Modelle zum Erklären herangezogen.

Diese Umschreibungen sind Kompromisse über alle Fächer und stellen einen Rahmen für die Lehrkräfte dar.

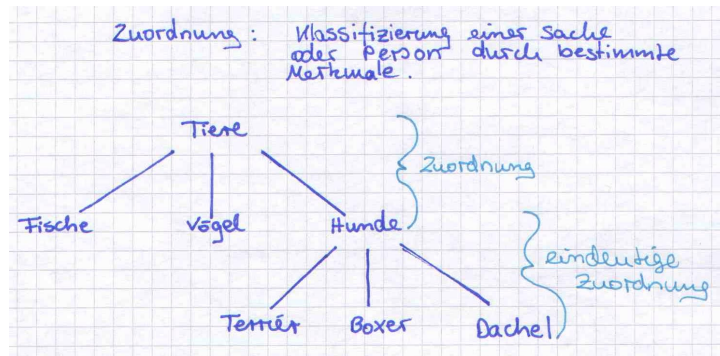
Die Schülerinnen und Schüler sind schrittweise an die Anforderungen von Erläuterungsaufgaben heranzuführen. Ein erster wichtiger Schritt besteht in dem **Besprechen von solchen Aufgaben und Lösungen an Beispielen**.

Im Folgenden wird beschrieben, wie wir versucht haben, uns diesem Aufgabentyp beim Thema „Funktionen“ zu nähern.

Dass dieser Aufgabentyp sinnvoll ist, leuchtet hier u. E. sofort ein: Bei der Einführung in die Funktionslehre werden mehrere grundlegende Begriffe behandelt, aber u. E. sehr selten explizit überprüft, was Schülerinnen und Schüler damit für Vorstellungen verbinden, kurz gesagt, was sie unter den Begriffen verstehen.

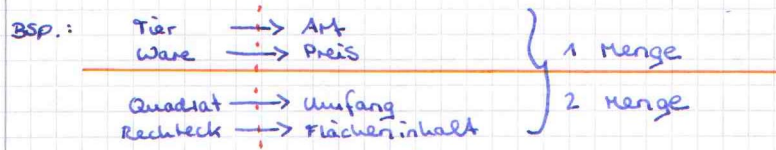
In Vorbereitung auf die Einführung des Funktionsbegriffes in Klasse 8 haben wir die Schülerinnen und Schüler aufgefordert, den Begriff „Zuordnung“ anhand eines selbstgewählten Beispiels zu erklären.

Die folgenden vier Beispiele von Schülerlösungen vermitteln einen Eindruck von der Vielfalt der Vorstellungen, die Schülerinnen und Schüler mit diesem Begriff verbinden. Erst durch die schriftliche Verbalisation hat man im Unterricht eine Chance, an diesen Begriffen zu arbeiten und eine tragfähige Grundlage für den weiterführenden Unterricht zu schaffen.



Zuordnung
 Ist eine Größe von einer anderen Größe abhängig, so spricht man von einer Zuordnung. Die Litarshall ist beim Tanken ist beispielsweise dem Gesamtpreis zugeordnet.

Zuordnung: Einem Element der Menge 1 wird einem Element der Menge 2 zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt unter einer bestimmten Vorschrift.



Zuordnung

Einem Element der Menge 1 wird ein Element zugeordnet. Diese Zuordnung erfolgt unter einer bestimmten Vorschrift!

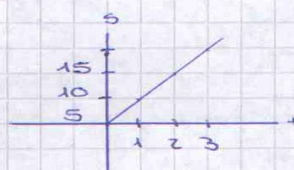
Beispiel: Ein Körper bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit 5m je Sekunde. Jedem zurückgelegten Weg wird die dafür benötigte Zeit zugeordnet.

Geg: Weg → Zeit
 $s \rightarrow t$

s	5m	10m	15m
t	1 sek	2 sek	3 sek



Überlegung: $s \sim t$
 Weg ist proportional zur Zeit!



Es zeigte sich zum einen, dass eine mathematische Sicht auf den Zuordnungsbegriff z. T. noch nicht vorhanden ist. Unterschiedlichste Elemente aus anderen Fächern fließen ein.

Zum anderen zeigen die Schülerantworten auch, dass die Anforderungen des „Erklärens“ sehr unterschiedlich ausgeprägt sind. Möchte man dieses Anforderungsniveau verstärkt anwenden, muss das Anwenden der „Signalwörter“ genauso geübt werden wie z. B. das Lösen von Textaufgaben.

Für derartige Übungen ist es wichtig, dass **Erläuterungsaufgaben auch im Anforderungsniveau abgestuft** werden.

Zum Heranführen an die Erwartungen bei der Umsetzung der „Signalwörter“ eignen sich ganz konkrete Aufgabenstellungen, die eine nicht allzu umfangreiche Darlegung der Schülerin/des Schülers erfordern.

Dies könnten z. B. Aufgaben wie folgt sein:

- Begründe, dass die Zahl 3 Nullstelle der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x - 3$ ist.
- Begründe, dass die Zuordnung „Jeder Anzahl gekaufter Artikel ist der Preis zugeordnet.“ eine Funktion ist.

Abstufungen im Schwierigkeitsgrad ergeben sich auch durch konkrete Vorgaben in Bezug auf zu verwendende Beispiele bzw. durch Angabe von Schwerpunkten, z. B.:

- Erläutere den Begriff „Funktion“ am Beispiel der Zuordnung $x \rightarrow y$ durch $y = |x|$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Hier gibt es zahlreiche Varianten je nach Wahl der Darstellungsform und nach Inhalt.
- Erläutere den Begriff „Funktion“ an einem selbst gewählten Beispiel.
- Erläutere den Begriff „Funktion“. Gehe dabei insbesondere auf die Definition des Begriffes sowie die Darstellungsformen einer Funktion ein.
- Erläutere den Begriff „Funktion“.

Die Schülerlösungen sind bei Erläuterungsaufgaben wie die oben aufgeführten Beispiele besonders vielgestaltig. Das Bewerten derselben stellt daher hohe Anforderungen an die Lehrkräfte. Grundlage muss ebenso wie bei anderen Aufgaben ein **Erwartungsbild** sein.

Im Erwartungsbild kann man sicher nicht detailliert erfassen, was und wie Schülerinnen und Schüler antworten sollen. Es kommt u. E. darauf an, wesentliche Hauptpunkte zu benennen, die aus fachlicher Sicht und mit Blick auf den dazu im Unterricht behandelten Stoff, auftreten sollten.

Im Folgenden geben wir ein Beispiel:

Aufgabe: Erläutere den Begriff „Funktion“ an selbstgewählten Beispielen.

Erwartungsbild:

(bezogen auf Klasse 8 nach Einführung des allgemeinen Funktionsbegriffes)

- ✓ Nennen der Definition
- ✓ Erläuterung des Begriffs „eindeutige Abbildung“ – Jedem Element x (Argument) wird genau ein Element y (Funktionswert) zugeordnet.
- ✓ D – Definitionsbereich
W – Wertebereich
- ✓ Die Funktion ist daran zu erkennen, dass jedem x wirklich **genau** ein y zugeordnet wird.
Gegenbeispiel nennen oder an Graphen zeigen.
- ✓ Eine Funktion lässt sich unterschiedlich beschreiben. – Verschieden Möglichkeiten an Beispielen aufzeigen.

Es hat sich u. E. als günstig erwiesen, wenn die Lehrkraft selbst eine Art „Musterlösung“ entwickelt, um den zeitlichen Aufwand sowie sprachliche und fachliche Aspekte der Schülerleistung einschätzen zu können.

Das Erwartungsbild ist eine wichtige Grundlage für die **Bewertung** der Schülerleistungen.

Einen absoluten Bewertungsmaßstab gibt es nicht; stets ist der Unterrichtsbezug zu beachten.

Einem Bewertungsmaßstab kann man sich nähern, indem bestimmten Teilleistungen Bewertungseinheiten zugeordnet werden. In dem oben aufgeführten Erwartungsbild könnte jeder ✓ für eine Bewertungseinheit (BE) stehen, also insgesamt fünf BE für die Aufgabe vergeben werden.

5.2 Aufgaben zur Systematisierung

1. Beispiel

Gegeben sind die folgenden Zuordnungen:

1. Jeder Zahl wird ihr Doppeltes zugeordnet.
2. Eine Parallele zur y -Achse durch $P(1;0)$.
3. $y = 2x + 4$
4. Gerade schneidet die y -Achse im gleichen Punkt wie bei Aufgabe 3 und hat den entgegengesetzten Anstieg.
5. Eine Gerade durch die Punkte $A(0;2)$ und $B(-3;2)$
6. Wertetabelle

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	0	-2	-4

Stelle diese Zuordnungen in einem Koordinatensystem dar!

Ergänze zu den folgenden Sachverhalten durch Angabe der entsprechenden Beispiele!

Funktionsbegriff:

eindeutige Zuordnung:
keine eindeutige Zuordnung:

Abbildungsvorschriften:

Wortvorschrift:
Funktionsgleichung:
Wertetabelle:
Punktepaare:

2. Beispiel:

Zeichne den Graphen der Funktion $y_1 = 2x - 1$ ($x \in \mathbb{R}$). Zeichne in das gleiche Koordinatensystem die Graphen y_2 , y_3 , y_4 , y_5 und y_6 , die durch die folgenden Eigenschaften gekennzeichnet sind. Gib die dazugehörigen Funktionsgleichungen an!

- a) y_2 schneidet die y -Achse im gleichen Punkt wie y_1
- b) y_3 verläuft parallel zu y_1
- c) y_4 verläuft durch $A(0;4)$ und hat den gleichen Anstieg wie y_1
- d) y_5 schneidet y_1 im Punkt $S(1;1)$ und fällt.
- e) y_6 hat den Anstieg -2 und die gleiche Nullstelle

3. Beispiel:

Bei dieser Aufgabe sollen Begriffe, Symbole und Gleichungen den entsprechenden Bedeutungen zugeordnet werden. Je nach Leistungsstärke der Klasse bieten sich zwei Varianten an:

- Die Schülerinnen und Schüler bekommen die Tabelle vorgegeben und ordnen die fehlenden Bedeutungen (unterhalb der Tabelle) zu.
- Die Schülerinnen und Schüler bekommen die Tabelle als Lückentext und suchen selbstständig nach „Gleichung, Symbol, Begriff“ bzw. „Bedeutungen“!

1. Variante: Ordne die nachfolgenden Begriffe in die Tabelle ein!

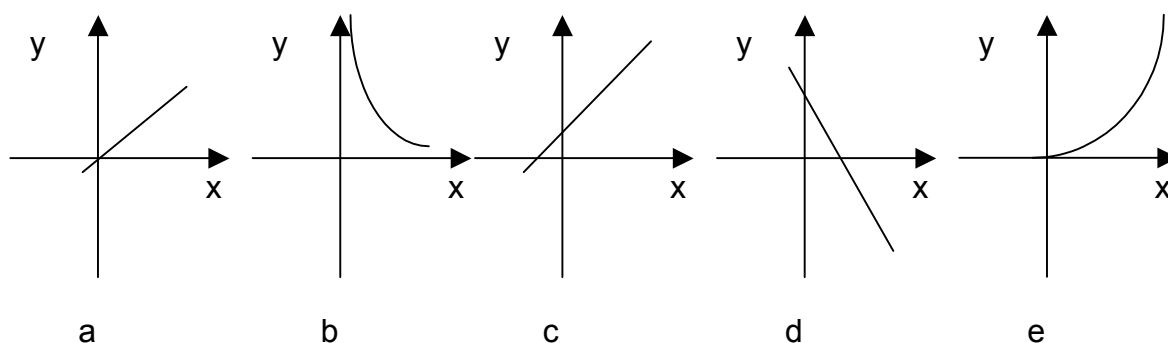
Gleichung, Symbol, Begriff (allgemein)	Bedeutung
a) $y = mx$	
b) $y = mx + n$	
c) x	
d) y	
e) m	
f) $m > 0$	
g) $m < 0$	
h) n	
i) $(x;y)$	
j) $(x;0)$	
k) Nullstelle	
l) $(0;y)$	
m) $y = n$	
n) $x = a$	
o) $y = mx + n_1$ und $y = mx + n_2$	

- Parallele zur x-Achse
- monoton steigend
- monoton fallend
- Schnittpunkt mit der x-Achse
- Abszisse des Schnittpunktes mit der x-Achse
- Gerade durch P(0;0)
- Parallele zur y-Achse
- Punkt auf der Geraden
- Element des Wertebereiches
- Ordinate des Schnittpunktes mit der y-Achse
- Anstieg
- Gerade schneidet die y-Achse im Punkt (0;n)
- Schnittpunkt mit der y-Achse
- Geraden verlaufen parallel
- Element des Definitionsbereiches

2. Variante: Ergänze die Tabelle!

Gleichung, Symbol, Begriff (allgemein)	Bedeutung
a)	Funktionsgleichung für eine lineare Funktion, deren Graph durch (0;0) verläuft.
b) $y = mx + n$	
c)	Element des Definitionsbereiches
d) y	
e) m	
f)	monoton steigend
g) $m < 0$	
h) n	
i)	Koordinaten eines Punktes
j)	Schnittpunkt mit der x-Achse
k) Nullstelle	
l) (0;y)	
m)	Gleichung für eine Gerade, die parallel zur x-Achse verläuft
n) $x = a$	
o)	Funktionsgleichungen für 2 Graphen, die parallel zueinander verlaufen.

4. Beispiel:



Schau dir die Graphen a – e gründlich an!

Vergleiche die Graphen bezüglich ihrer Eigenschaften (Monotonie; Nullstelle, lineare oder andere Funktionen, Verlauf durch den Koordinatenursprung) und versuche, sie in Klassen einzuteilen.

5.3 Aufgaben besonderer Art

Nachfolgend sind verschiedene Formen von „Rätseln“ dargestellt, die die Grundbegriffe der Funktionslehre beinhalten. Die Rätsel fordern vom den Schülerinnen und Schülern eine gedankliche Umsetzung einer Umschreibung in die Fachterminologie.

In Abhängigkeit von der jeweiligen Altersstufe, in der sie Einsatz finden, lassen sich ähnliche Aufträge begrifflich ergänzen oder sogar von den Schülerinnen und Schülern selbst erzeugen.

Der Einsatz solcher Rätsel dient der Abwechslung im Unterrichtsgeschehen zur Wiederholung der Grundbegriffe am Ende der Behandlung der Funktionen oder in einer Kurzübung zu einer anderen Unterrichtsthematik.

(1) Suchworträtsel

In der Ansicht verstecken sich Grundbegriffe, die du bei der Behandlung der Funktionen kennen gelernt hast. Finde so viele wie möglich.

Schüleransicht

B	F	L	K	O	O	R	D	I	N	A	T	E	N	S	Y	S	T	E	M
H	Z	F	H	F	T	Z	U	D	C	V	S	A	W	E	B	H	U	I	E
Q	R	U	U	N	E	R	G	L	O	N	M	P	E	B	G	K	H	L	N
W	T	F	O	N	V	W	A	O	X	F	G	I	Z	C	M	C	L	P	G
O	A	S	E	R	K	T	E	G	B	N	N	I	O	M	I	D	R	B	E
R	S	T	V	G	D	T	Z	R	A	O	J	R	U	E	M	P	A	D	E
T	G	E	R	F	Z	N	I	D	T	T	A	K	R	O	L	V	X	P	B
V	E	I	C	T	Z	B	U	O	D	E	T	E	D	N	E	L	L	A	F
O	R	G	V	G	T	S	N	N	N	A	B	U	P	L	K	S	D	R	T
R	Q	E	X	T	H	O	K	I	G	S	N	E	L	M	N	S	E	A	P
S	W	N	E	C	M	G	L	H	N	O	G	N	R	V	Z	D	H	M	I
C	E	D	G	T	H	J	E	O	I	T	R	L	N	E	K	M	L	E	Z
H	G	T	U	T	G	E	I	T	S	N	A	U	E	K	I	D	Z	T	A
R	E	F	K	M	I	T	K	L	O	E	P	T	C	I	B	C	N	E	K
I	F	R	T	N	I	N	B	H	E	Z	H	K	L	O	C	S	H	R	M
F	T	X	B	N	U	L	L	S	T	E	L	L	E	L	A	H	Q	U	J
T	V	J	I	F	R	P	M	K	L	D	T	N	A	R	D	A	U	Q	Z
S	R	F	U	K	L	M	F	R	N	W	Q	U	H	O	P	F	Z	N	I
W	E	R	Z	N	O	E	R	A	A	P	E	T	E	N	D	R	O	E	G
D	R	A	W	E	R	T	E	T	A	B	E	L	L	E	U	Q	N	K	F

Lösung

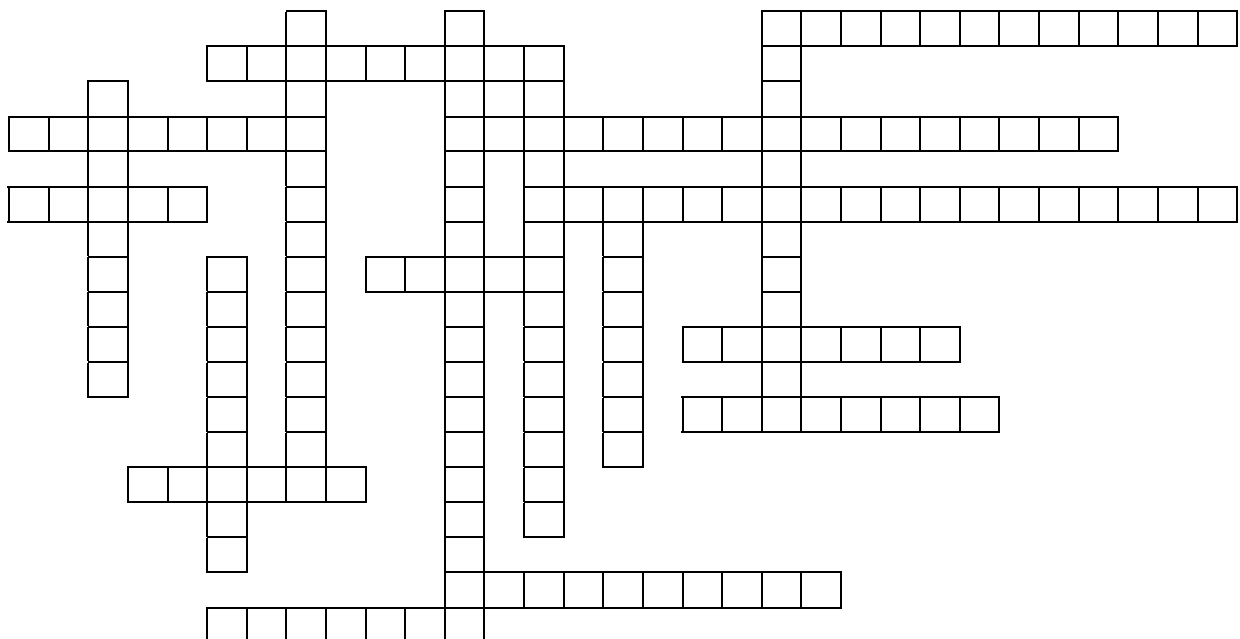
			K	O	O	R	D	I	N	A	T	E	N	S	Y	S	T	E	M	
	Z	F																	E	
		U	U									E					H		N	
W			O	N		W						I		C		C			G	
O		S		R	K		E				N				I				E	
R		T			D	T		R		O		R		E						
T		E				N	I		T		A		R					P		
V		I					U	O		E		E	D	N	E	L	L	A	F	
O		G					N	N	N		B								R	
R		E				O		I	G	S	N	E							A	
S		N			M		L		N	O	G		R						M	
C	E	D						O	I		R	L		E					E	
H		T				G	E	I	T	S	N	A		E		I			T	
R				K			T	K				P			I		C		E	
I					N	I	N					H			C		H	R		
F					N	U	L	L	S	T	E	L	L	E			H			
T				I	F		P					T	N	A	R	D	A	U	Q	
		F																	N	
	E						E	R	A	A	P	E	T	E	N	D	R	O	E	G
D				W	E	R	T	E	T	A	B	E	L	L	E					

(2) Silbenrätsel

In das folgende Raster passen Grundbegriffe der Funktionslehre, die sich aus den nachfolgenden Silben zusammensetzen lassen.

Finde die Begriffe und ordne sie in das Raster ein.

an – be – be – bel – chung – de – di – drant – fal – fi – funk – funk – ge – ge – gend – glei – graph – ko – le – le – lend – me – men – mo – na – ne – ni – nie – no – null – nung – or – ord – ord – pa – paa – punk – qua – ra – re – reich – reich – schrift – stieg – stei – stel – sys – ta – te – te – te – te – tem – ten – ter – tion – tions – tions – to – vor – wer – wort – zu



Lösung



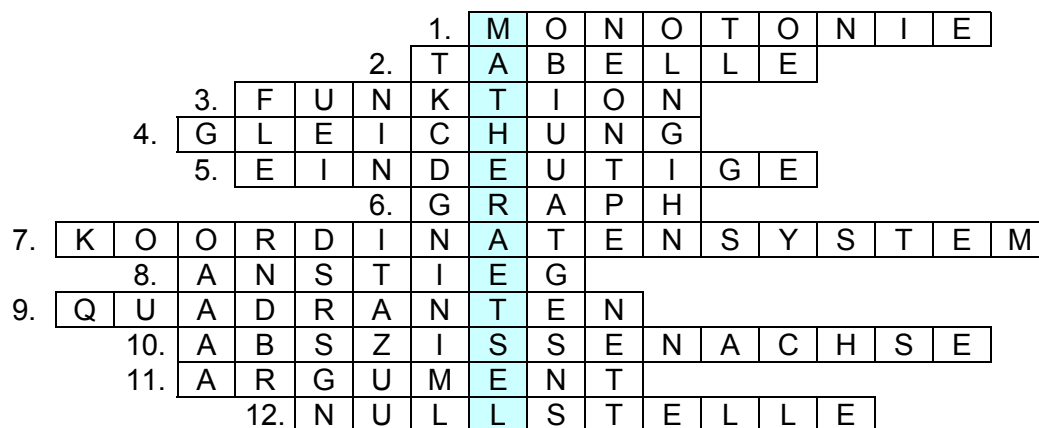
(3) Lösungswort suchen

Die Buchstaben der markierten Flächen ergeben das Lösungswort.

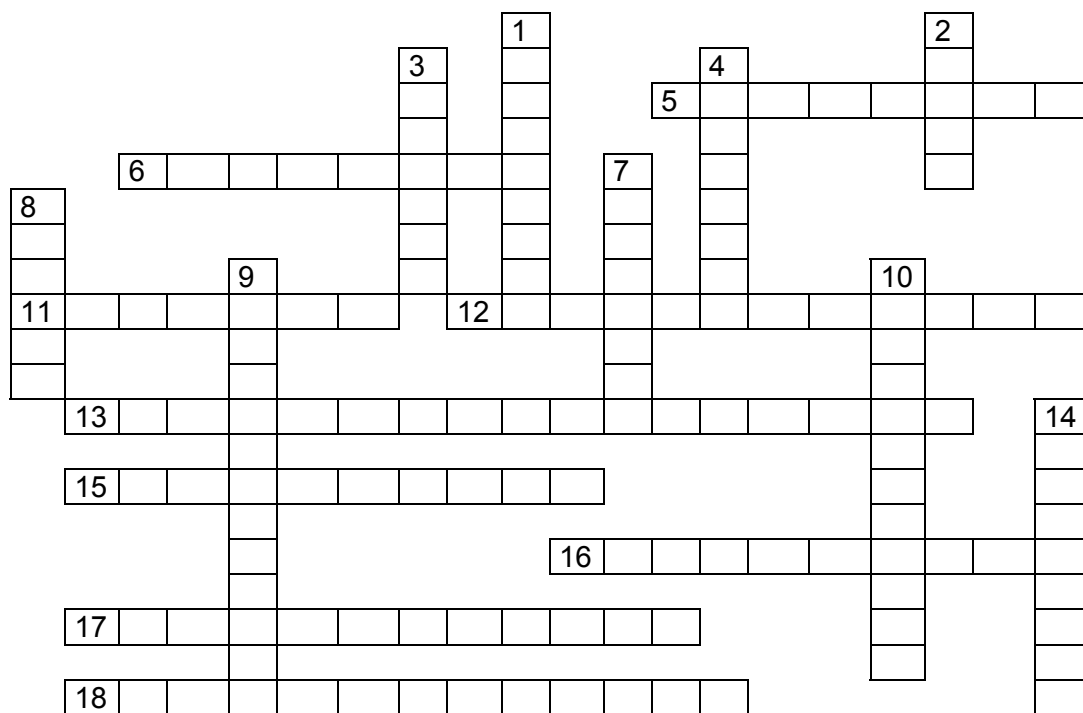
Die gesuchten Begriffe beziehen sich alle auf das Thema „Funktionen“.

1. Eintönigkeit
2. Zahlenübersicht für x- und y-Werte
3. Eine eindeutige Abbildung der Menge X auf die Menge Y nennt man eine
4. Zwei Terme, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind, bezeichnet man als
5. Funktionen sind Zuordnungen.
6. Das Bild einer Funktion nennt man auch
7. Ort, an dem man Funktionen zeichnen kann.
8. „m“ bezeichnet man bei linearen Funktionen als
9. Ein Koordinatensystem besteht aus vier
10. Die x-Achse nennt man auch
11. Ein anderes Wort für x-Wert
12. x-Wert, bei dem die graphische Darstellung die x-Achse schneidet.

Lösung



(4) Kreuzworträtsel



Trage jeweils die richtigen Begriffe ein.

Waagerecht

- 5 Funktionswert im Koordinatensystem
- 6 Abschnitt des Koordinatensystems
- 11 Parameter einer linearen Funktion
- 12 eine Darstellungsform für Funktionen
- 13 besteht aus 4 Quadranten
- 15 spezielle quadratische Funktionsgleichung
- 16 hier wird die x-Achse geschnitten
- 17 hier treffen sich zwei Graphen
- 18 ganz oben oder ganz unten

Senkrecht

- 1 steigend oder fallend
- 2 zeichnerische Darstellung
- 3 Graph einer Funktionsklasse
- 4 x-Wert
- 7 eindeutige Zuordnung
- 8 Graph einer Funktionsklasse
- 9 keine Diskriminierung
- 10 Menge der Funktionswerte
- 14 Eigenschaft mancher Funktionen

[illegible]

Im Folgenden wird ein **Domino-Spiel** vorgestellt, das zur Festigung des Funktionsbegriffs und weiterer damit zusammenhängender Begriffe sowie vor allem der Darstellungsformen dienen soll.

Es kann auch in Partner- oder Gruppenarbeit „gespielt“ werden. Bei Partner- bzw. Gruppenarbeit sind die Schülerinnen und Schüler gezwungen, die Spielzüge auch zu begründen.

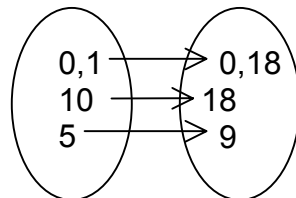
Zu beachten ist ferner, dass abgesehen von den Eulenjokern nur eine Lösung existiert.

- Beginnt mit dem Feld Start.
- Beachtet, dass es immer nur genau eine Möglichkeit des Anlegens gibt (außer beim Eulenjoker).
- Schaut Euch die Felder zu Beginn genau an.



Start

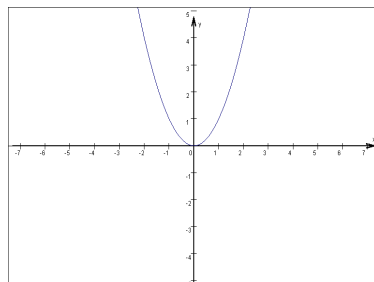
Ein Kilogramm Äpfel kostet
1,80 €.



x	-1	10	$\frac{1}{3}$
y	-3	30	1

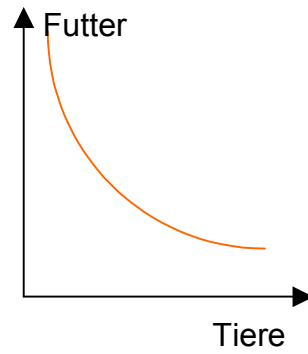
Jeder reellen Zahl wird ihr
Dreifaches zugeordnet.

$$f(x) = y = x^2$$

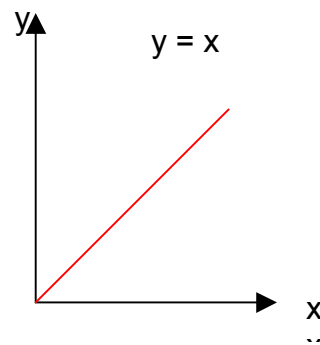


Gerade durch die Punkte
A(0;3) und B(1;0)

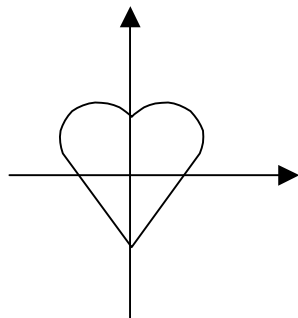
$$f(x) = y = -3x + 3$$

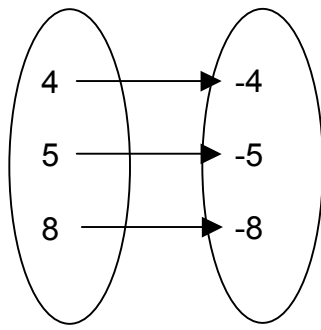


Je mehr Tiere zu füttern sind,
um so schneller ist der
Futternvorrat aufgebraucht.



x	0	5	100
y	0	5	100



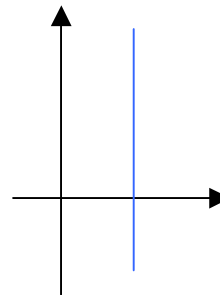


Körpergröße $\rightarrow$ Alter eines Menschen

Punkte, mit der Eigenschaft, zu der Funktion $y = -2x$ zu gehören.

$$y = -x$$

Länge einer Strecke in Wirklichkeit $\rightarrow$ Länge auf der Landkarte

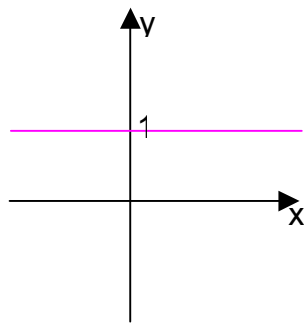


Temperatur $\rightarrow$ Tageszeit

1 cm auf der Karte entsprechen 400 m in der Wirklichkeit.

Jede Schülerin/jeder Schüler erhält eine Zeugnisnote in Mathematik.

Der Graph der Funktion ist eine Gerade durch die Punkte $(0;1)$ und $(7;1)$.



Der Graph der Funktion schneidet die y-Achse im Punkt $(0;4)$ und verläuft parallel zu $y = f(x) = 2x$.

$$f(x) = 1,25\text{€ } x + 2,50 \text{ €}$$

Eine Fahrt mit dem Taxi kostet 1,25 € je Kilometer. Zusätzlich ist eine Grundgebühr von 2,50 € zu entrichten.

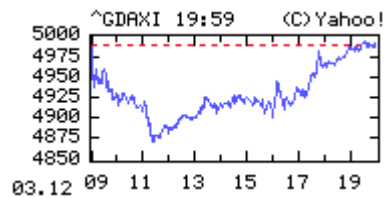




Eine lineare Funktion hat die Nullstelle $x_0 = -10$

x	6	-4	-10
y	8	3	0

Der Börsenkurs ändert sich ständig.



Die Graphen von 2 Funktionen verlaufen zueinander parallel.

$$y = -0,5x$$

$$y = -0,5x + 2$$

$$y = 2x + 4$$



A(3;-6)
B(0;0)
C(-1;2)



Paul → 4
Anna → 1
Frieder → 3

Ablegspiel

Das Spiel kann ab der Klasse 8 aufsteigend zur Wiederholung und Festigung der grundlegenden Begriffe der Funktionslehre eingesetzt werden.

Besonderes Augenmerk wurde dabei auf die Vielfältigkeit der Erscheinungsformen von Zuordnungen gelegt.

Auf den Seiten 58 bis 64 sind verschiedene Zuordnungen in unterschiedlichen Repräsentationsformen dargestellt.

Sie sollen den Schülerinnen und Schülern als Einzelkarten zur Verfügung gestellt werden, insgesamt sind es 28 Karten.

Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Karten sowie Oberbegriffe zur Einordnung vom Lehrer. Sie beraten eine mögliche Zugehörigkeit der Karten zu den Oberbegriffen.

Ihr Auftrag beinhaltet gleichzeitig die Diskussion der jeweiligen Begründung ihrer Wahl, die im weiteren Verlauf der Unterrichtssequenz von einzelnen Schülerinnen und Schülern präsentiert wird.

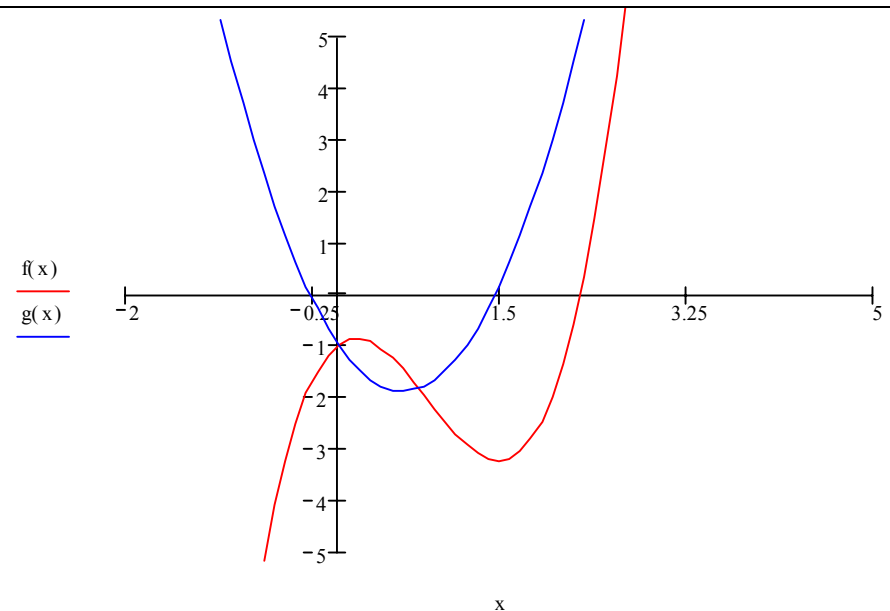
Für den Einsatz ist Partner- oder Gruppenarbeit zu empfehlen in einem Zeitrahmen von ca. 10 Minuten für das Sortieren der Karten sowie 20 Minuten für Begründungen.

Ziel:

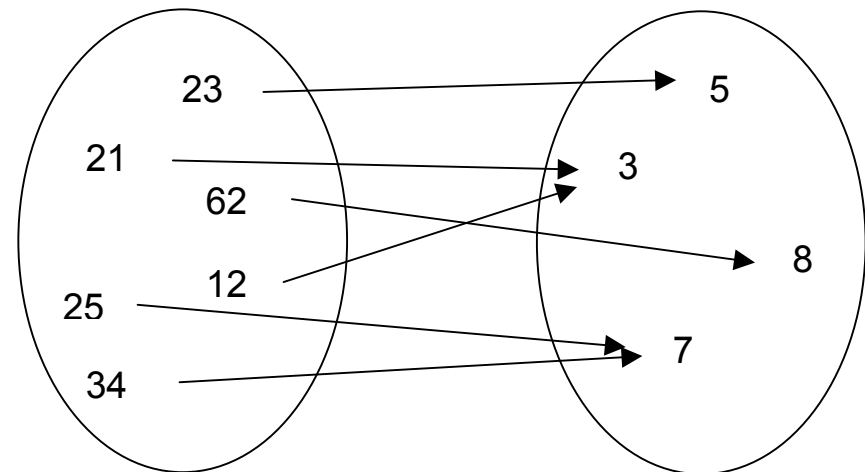
Die Schülerinnen und Schüler kennen die verschiedenen Darstellungsformen für Funktionen. Sie sind geübt im Identifizieren und Zuordnen von Oberbegriffen. Ihnen wird der Zusammenhang zwischen den behandelten Inhalten der Funktionslehre vorangegangener Klassenstufen bewusster.

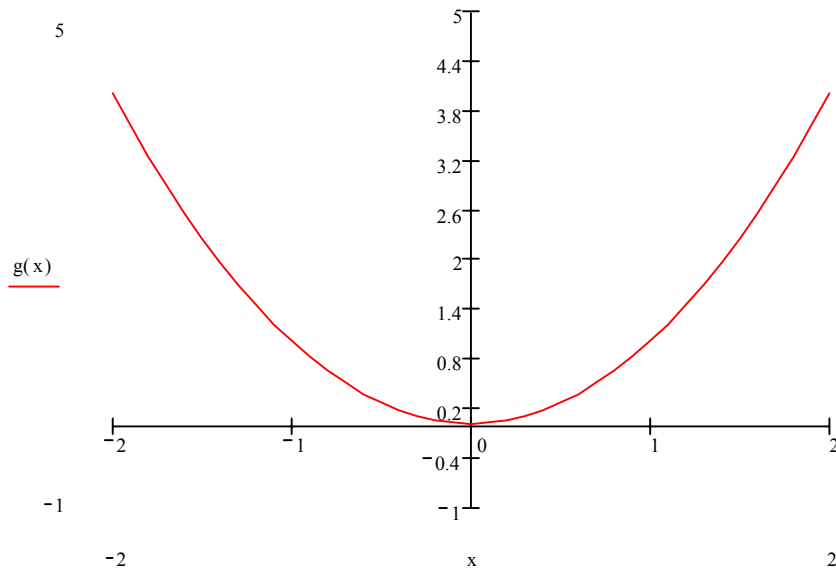
Durch die Partner- bzw. Gruppenarbeit sind die Schülerinnen und Schüler gezwungen, ihre Vorschläge zu begründen, zu argumentieren und eine gemeinsame Entscheidung zu treffen, die in der Präsentation vertreten wird.

$$f(x) = \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1$$



Beim ersten Treffen der Tanzstunden-Teilnehmer sollte sich jedes Mädchen einen Jungen aussuchen. Das war total lustig. Alle Mädchen der 9/2 wollten mit Thomas tanzen.





$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Allen natürlichen
Zahlen wird ihre
Quersumme
zugeordnet.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4	9	16

Die Funktion $f(x) = \sqrt{x}$

ist für negative Zahlen nicht definiert.

Folgende Punkte liegen auf einer Geraden:

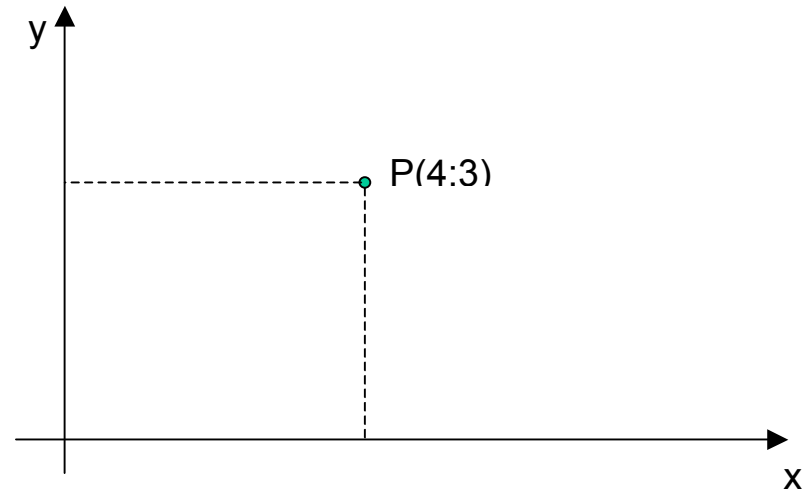
A(4;7)

B(1;1)

C(-2;-5)

D(3;5)

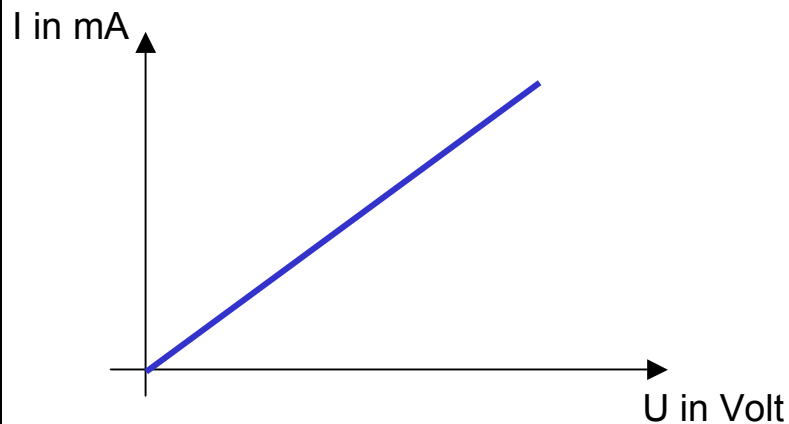
Als wir die Messwerte für zurückgelegten Weg und verstrichene Zeit aufgenommen hatten, stellten wir fest, dass mit zunehmender Zeit die Werte für die zurückgelegte Strecke nahezu gleichmäßig anstiegen.



Als wir die Messwerte für zurückgelegten Weg und verstrichene Zeit aufgenommen hatten, stellten wir fest, dass sich im Weg-Zeit-Diagramm beinahe eine Gerade ergab.

Als wir die Messwerte für zurückgelegten Weg und verstrichene Zeit aufgenommen hatten, stellten wir fest, dass beide Werte zueinander proportional waren.

Kennlinie eines Konstantan-Elementes

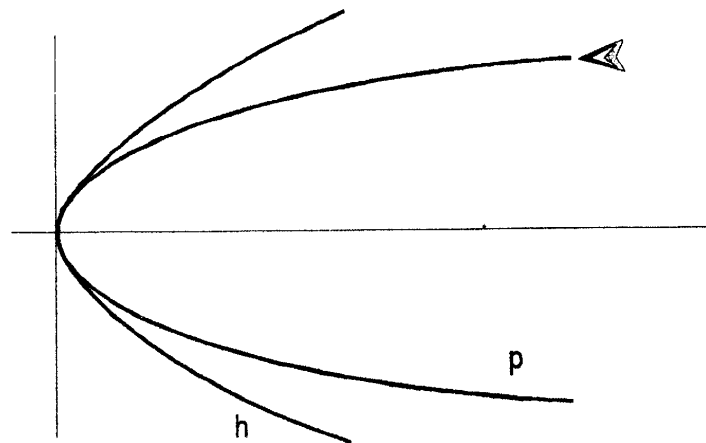
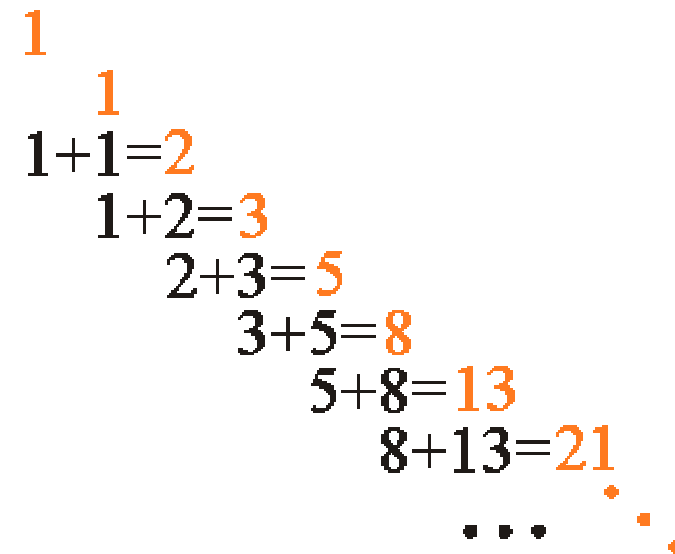


Zur Zeit sind in unserer Klasse wieder diese kleinen Heftchen in, in die jeder seinen Steckbrief eintragen muss. Bei Lieblingstier haben fast alle Mädchen Pferd angegeben.

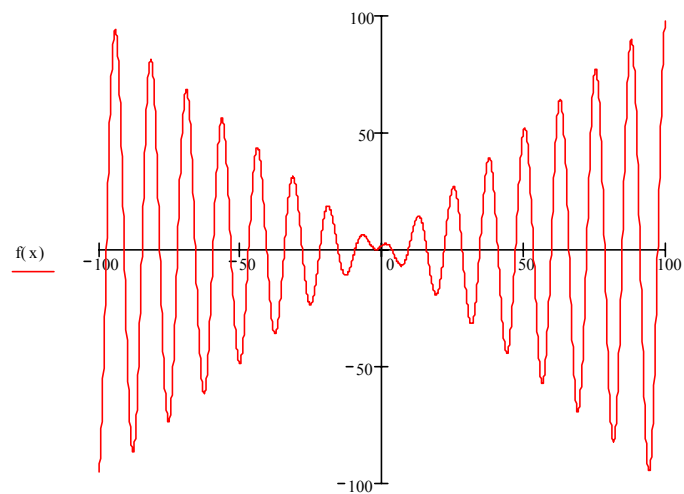
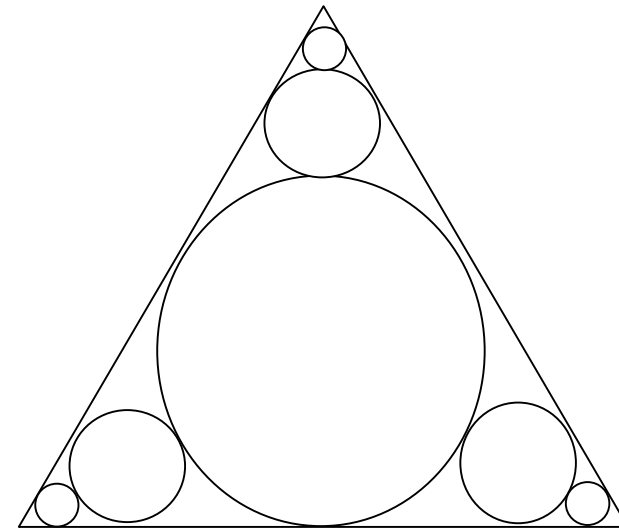
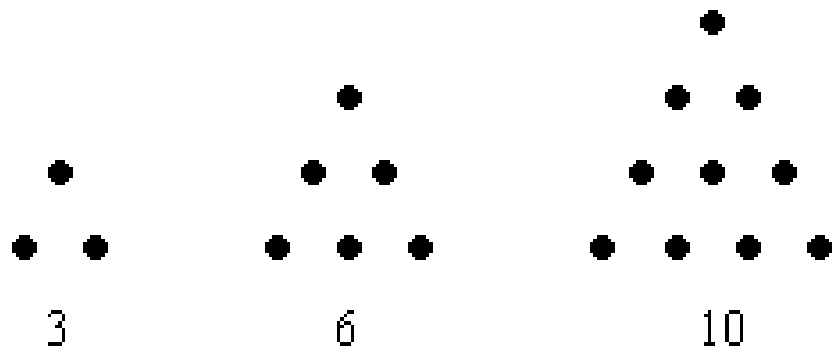
EPCOS AG NAMENS-AKTIE O.N. an ETR



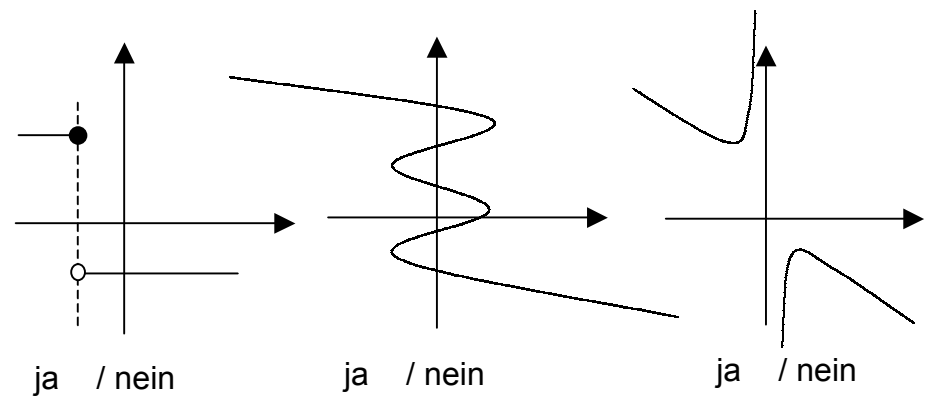
Quelle: Teledata Börsen Informations GmbH

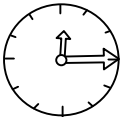
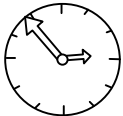


$$V = \frac{a^2(x+h)}{3} - \frac{b^2x}{3} = \frac{a^2\left(\frac{bh}{a-b} + h\right)}{3} - \frac{b^2\left(\frac{bh}{a-b}\right)}{3}$$



Gehören die Graphen zu einer Funktion?



vormittags	nachmittags	What time is it?
		
		
		

Körper	geschätzte Masse	gemessene Masse
Kartoffel		
Limonadenflasche		
Physikbuch		
Banane		
Apfel		

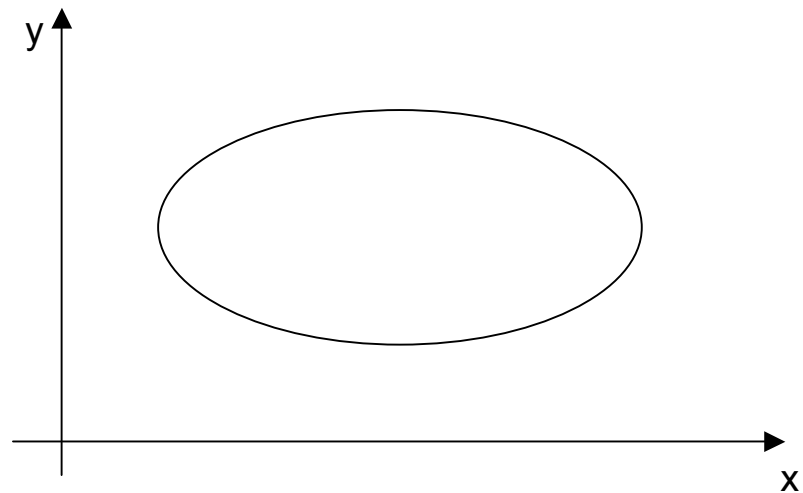
Cola 1,50
Wasser 1,20
Kaffee 2,00

**A
n
g
e
b
o
t
t**

Bockwurst 2,50
Grillwurst 3,50
Currywurst 3,50

Twix 1,00
Mars 1,00
Kaugummi 0,20

Pommes groß 2,00
Pommes klein 1,30
Kartoffelsalat 2,00



6 Erfahrungen und Befunde

6.1 Zu Schülermeinungen

Zum Ende des Schuljahres 2001/2002 führten wir in den 9. Klassen der Modellversuchsschulen eine schriftliche anonyme Befragung zu Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler bezüglich des Mathematikunterrichts durch.

Es wurden 276 Schülerinnen und Schüler aus 6 Schulen verschiedener Bildungsgänge befragt.

Bezogen auf kumulatives Lernen interessierte uns, ob und wie Schülerinnen und Schüler selbst das kumulative Lernen wahrnehmen. Zunächst sollte erfasst werden, ob die Schülerinnen und Schüler Zusammenhänge zwischen verschiedenen Themen des Mathematikunterrichtes sehen. Dazu wurde folgende Frage gestellt (in den Spalten, in denen die Schülerinnen und Schüler ankreuzen sollten, stehen bereits die Ergebnisse in Prozent).

**Im Mathematikunterricht lernst du Stoff zu verschiedenen Themen z. B. Funktionen, Gleichungen, Variablen, Geometrie.
Empfindest du, dass es zwischen diesen Themen Zusammenhänge gibt?**

	ja	nein
a) Ich sehe zwischen den Themen durchaus Zusammenhänge.	80	20
b) Ich sehe einen Zusammenhang zwischen den Themen Funktionen und Gleichungen.	90	10
c) Es gibt einen Zusammenhang zwischen Geometrie und Gleichungen.	75	25

Begründe bitte jeweils deine Meinung.

Man kann zunächst feststellen, dass die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler durchaus Zusammenhänge sieht. Es gibt jedoch auch etliche Schülerinnen und Schüler, für die Themen des Mathematikunterrichtes beziehungslos nebeneinander stehen.

Aufschlussreich sind auch die Begründungen der Schülerinnen und Schüler, die Zusammenhänge sehen. Hier typische Beispiele:

Zu a)

- Der Stoff baut aufeinander auf.
- Variablen verwenden wir bei Berechnungen.
- Die Funktionsgleichung hat Bedeutung für die graphische Darstellung der Funktion.
- Ein Zusammenhang wird mir durch verschiedene Lösungswege deutlich.
- Kann man das eine nicht, hat man auch in anderen Gebieten Probleme.
- Manches braucht man auch in anderen Fächern.

Zu b)

- Eine Funktion beschreibt man mit einer Funktionsgleichung.
- Berechnung von Punkten von Funktionen
- Berechnung der Nullstellen von Funktionen
- Gleichungen kann man grafisch lösen.

Zu c)

- Mit Gleichungen werden geometrische Größen wie das Volumen, die Fläche u. Ä. berechnet.
- Herleitung von Gleichungen
- Das Führen von Beweisen erfordert den Umgang mit Gleichungen.

Schülerinnen und Schüler, die angeben, keine Zusammenhänge zu sehen, führten z. B. aus:

- Es wurde mir nie ein Zusammenhang aufgezeigt.
- Mathe ist mir meist unklar, deshalb sehe ich auch keine Zusammenhänge.

Von besonderer Bedeutung ist u. E., auf welche Art und Weise Schülerinnen und Schülern Zusammenhänge bewusst werden. Diesem gingen wir mit folgender Frage nach.

Ich erkenne Zusammenhänge zwischen den einzelnen Stoffgebieten am besten ...
Kreuze bitte Zutreffendes an (Mehrfachnennungen sind möglich) bzw. ergänze.

- | | |
|-------------------------------|--|
| ☐ 55 % | durch das Lösen von Anwendungsaufgaben aus meinem Erfahrungsbereich |
| ☐ 56 % | durch eindeutige Hinweise der Lehrkraft |
| ☐ 42 % | durch Lösen von komplexen Übungsaufgaben |
| ☐ 30 % | durch Nacharbeiten des Unterrichtsstoffes (z. B. mit Hilfe des Lehrbuchs, ...) |
| ☐ 56 % | durch das kontinuierliche Wiederholen des Unterrichtsstoffs bezogen auf die einzelnen Themen wie z. B. Gleichungen, Funktionen, Geometrie |

Zusätzlich wurden von einzelnen Schülerinnen und Schülern i. w. genannt:

Themenzusammenfassungen, Übungsaufgaben aus dem Lehrbuch, Einbeziehung von Aufgaben aus anderen Unterrichtsfächern, selbstständiges Üben, Gespräch mit der Klasse und der Lehrkraft, gute Erklärung durch die Lehrkraft, durch Nachhilfe, Karteikarten mit Übersichten, eigenes Erarbeiten von Inhalten

Die vorgegebenen Möglichkeiten werden nahezu gleichverteilt von den Schülerinnen und Schülern genannt.

Das Nacharbeiten des Unterrichtsstoffes für das Erkennen von Zusammenhängen schätzen die Schülerinnen und Schüler zu 30 % als am wenigsten bedeutsam ein.

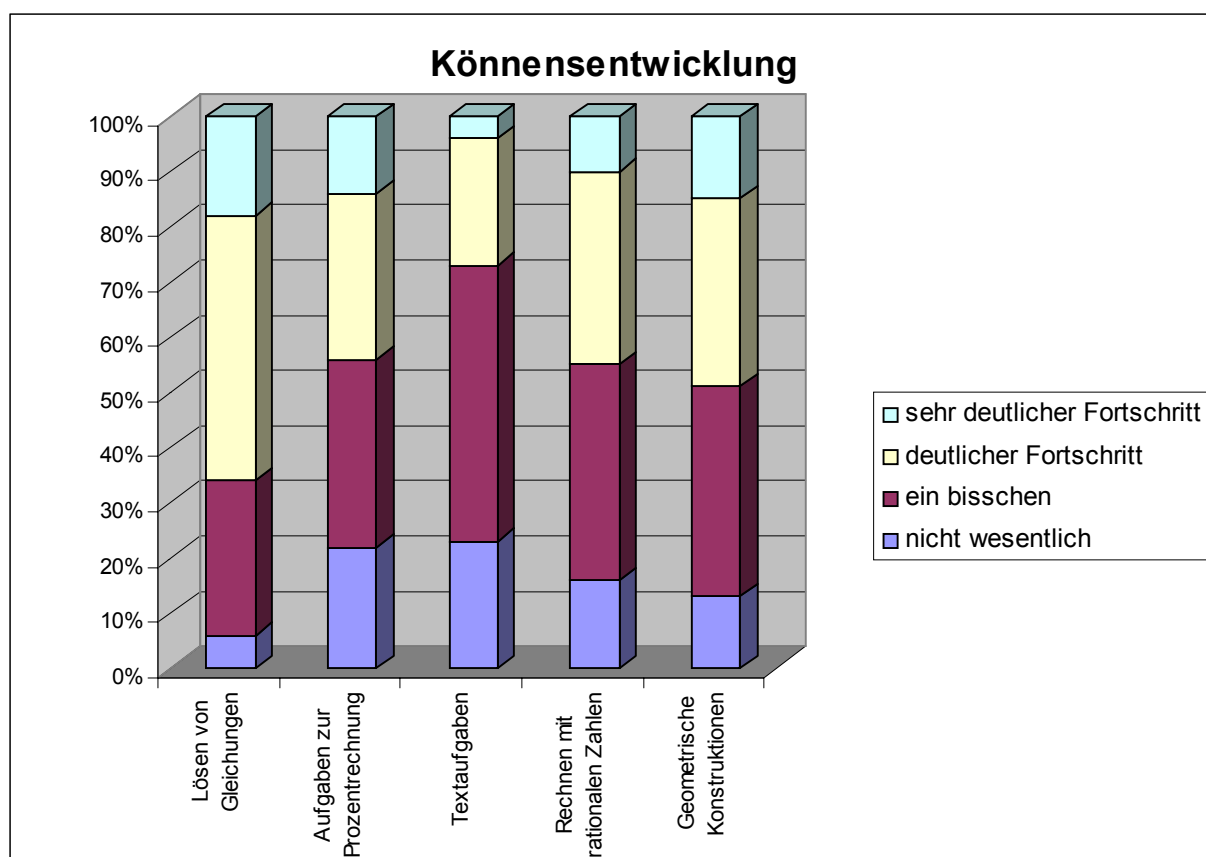
Mit Blick auf kumulatives Lernen ist u. E. wichtig, ob und wie die Schülerinnen und Schüler selbst ihre Entwicklung erleben. Dazu wurde folgende Frage den Schülerinnen und Schülern vorgelegt.

Schätze bitte ein, wie sich dein Können beim Bearbeiten folgender Aufgabentypen von der 7. Klasse bis jetzt entwickelt hat.

Kreuze bitte Zutreffendes an.

Aufgabentyp	nicht wesentlich	ein bisschen	deutlicher Fortschritt	sehr deutlicher Fortschritt
Lösen von Gleichungen				
Aufgaben zur Prozentrechnung				
Textaufgaben				
Rechnen mit rationalen Zahlen				
Geometrische Konstruktionen				

Das Diagramm zeigt die Ergebnisse.



Zunächst ist festzustellen, dass sehr viele Schülerinnen und Schüler durchaus Fortschritte beim Lernen subjektiv erleben, denn nur ca. 15 % der befragten Schülerinnen und Schüler geben an, keinen messbaren Fortschritt an sich selbst feststellen zu können. Obwohl die subjektive Wahrnehmung eines Lernfortschrittes für Schülerinnen und Schüler wichtig ist, muss diese Einschätzung nicht mit dem realen Lernfortschritt einher gehen (vgl. z. B. die Ergebnisse von TIMSS und PISA).

Interessant ist ferner, wie differenziert die Schülerinnen und Schüler bei verschiedenen Gebieten dies einschätzen. Während sie beim Thema Gleichungen Fortschritte sehen, schätzen sie ihre Fähigkeiten beim Lösen von Textaufgaben selbstkritisch ein.

Diese Selbsteinschätzung der Schülerinnen und Schüler stimmt durchaus mit den Erfahrungen der Lehrkräfte (Fremdeinschätzung) überein.

6.2 Erfahrungen aus der Unterrichtspraxis

Die vorliegenden Vorschläge wurden im Unterricht der Modellversuchsschulen von interessierten Lehrkräften berücksichtigt.

Generell kann eingeschätzt werden, dass die vielfältigen Aufgabenvorschläge geeignet sind, den Unterricht aspektreich und schülerorientiert zu gestalten.

Grundsätzlich begrüßt wird, dass insgesamt mit dem Material den Lehrkräften eine Hilfe zur Planung und Gestaltung des Unterrichts vorliegt, da es den Bogen von der Sicherung des Ausgangsniveaus über die Erarbeitung bis hin zur Festigung einschließlich Systematisierung spannt. In diesem Sinne leisteten die Vorschläge einen Beitrag zu einer „neuen“ Aufgabenkultur. Inwieweit dadurch tatsächlich auch das kumulative Lernen gefördert wird, ist u. E. quantitativ kaum erfassbar.

Dennoch kann eingeschätzt werden, dass die von uns gewählten Schwerpunkte „vielfältige Unterrichtseinstiege“, „Betonung des Begriffsverständnisses“ mit den Akzenten Systematisierung und Erläuterungsaufgaben auch von den Lehrkräften als relevant angesehen werden.

Erfahrungen zu einzelnen Vorschlägen wurden zum Teil weiter vorn mit einbezogen (s. z. B. Kapitel 5.1 Erläuterungsaufgaben).

Zu speziellen Aufgaben lieferten einige Kolleginnen und Kollegen Erfahrungsberichte.

Zwei davon vermitteln einen Eindruck.

Erfahrungen beim Einsatz des „Ablegspiels“ (Herr Hoffmann, Francisceum Zerbst)

Ich habe das Ablegspiel in einer 9. Klasse des Gymnasiums mit dem Ziel der Systematisierung von Begriffen der Funktionslehre eingesetzt, um Fortschritte beim sachgerechten Verwenden der Grundbegriffe in Unterrichtsgesprächen zu erreichen.

Hinzu kommt, dass sich die Schülerinnen und Schüler m. E. altersbedingt nur ungern lautsprachlich äußern.

Um grundlegende Fähigkeiten auszubilden, habe ich eine Übung gewählt, die den Schülerinnen und Schülern sowohl die Diskussion über entsprechende mathematische Probleme untereinander abverlangte als auch eine abschließende Präsentation ermöglichte. Das Ablegspiel war hier ideal (s. Kapitel 5.3). Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten in Gruppen.

Die Gruppen erhielten die Aufgabe, die Karten nach den Gebieten Graphische Darstellung, Lineare Funktionen, Quadratische Funktionen, Wertepaare und Gleichungen zu ordnen. Bei der Auswertung sollten die Schülerinnen und Schüler ihre Entscheidungen vorstellen und begründen.

Die Tatsache, dass in vielen Fällen mehrere Zuordnungen möglich waren, war beabsichtigt, um eine möglichst rege Diskussion in den Gruppen zu forcieren. Das gelang auch sehr gut. In einigen Fällen kam es sogar zu Abstimmungen über die beste Zuordnung einer Karte. Mit voranschreitender Zeit und dem damit verbundenen Näherrücken der Präsentation der Gruppenentscheidungen vor der Klasse drehten sich die Gespräche verstärkt um die richtige oder beste Formulierung der Begründungen. Es war zu beobachten, dass viele Schülerinnen und Schüler bei der Suche nach korrekten und schlüssigen Begründungen automatisch auf die ihnen bekannten Fachbegriffe zurückgriffen.

Alles in allem stellt das Ablegspiel eine gelungene Kombination von schülerorientiertem Unterrichtsablauf und kompetenzförderndem (soziale Kompetenz, Vortragskompetenz) pädagogischen Ansatz mit einer Systematisierung der Begriffe der Funktionslehre dar.

Erfahrungen zum Einsatz der Worträtsel und des Funktionsdominos (Frau Schulze, Frau Ehrlich, Sekundarschule Adam Ries Halle)

Wir haben die Worträtsel zum Thema Funktionen und das Funktionsdomino (s. Kapitel 5.3) in verschiedenen Klassenstufen von 8 bis 10 eingesetzt sowohl unter dem Aspekt der Festigung neu eingeführter Begriffe als auch zur Wiederholung.

Die Hinweise zur Vorbereitung und Durchführung erscheinen uns als ausreichend.

Die Aufgaben empfinden wir als geeignet, um spezielle Grundkenntnisse der Schülerinnen und Schüler zu überprüfen und ihnen deren Vernetzung zu verdeutlichen.

Die Schülerinnen und Schüler haben mit viel Begeisterung sowohl selbstständig (Worträtsel) als auch in Partner- bzw. Gruppenarbeit (Domino) an der Erfüllung gearbeitet.

Das Funktionsdomino stellte für unsere Schülerinnen und Schüler z. T. recht hohe Ansprüche, insbesondere das Ineinanderüberführen der Funktionsdarstellungen.

Insgesamt schätzen wir ein, dass die dargestellten Varianten sich gut für Festigungs- und Wiederholungsstunden eignen.

7 Zusammenfassung

Bei der Auseinandersetzung mit dem kumulativen Lernens wurden folgende Ergebnisse erreicht:

- (1) Anwendungsbezogene Unterrichtseinstiege finden und Verbindungen zu Vorkenntnissen herstellen

Zum Thema Funktionen wurden verschiedene Einstiegsvarianten erarbeitet (s. Kapitel 3.1, 3.2, 4.1) und im Unterricht erprobt. Das Augenmerk liegt in allen Varianten auf der Verknüpfung mit Bekanntem (Wiederholung der Zuordnung, fächerübergreifende Bezüge) sowie auf der Betonung eines inhaltsreichen Begriffsverständnisses.

- (2) Zum Thema Funktionen wurde vielfältiges Übungsmaterial entwickelt und im Unterricht erprobt (s. Kapitel 3.3, 4.2, 5.2, 5.3).

- (3) Um den *Begriffen* im Mathematikunterricht mehr explizite Aufmerksamkeit zu widmen, wurde der Aufgabentyp **Erläuterungsaufgaben** betrachtet. Erste Erfahrungen sind im Kapitel 5.1 dargestellt.

- (4) Die Schülerwahrnehmung in Bezug auf das kumulative Lernen wurde mit Hilfe einer schriftlichen Befragung erfasst (s. Kapitel 6.1). Die Befunde geben Hinweise für das Einbeziehen der Schülermeinungen in den Unterricht.

Literaturverzeichnis

- /1/ Gutachten zur Vorbereitung des Programms „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. BLK – Materialien zur Bildungsplanung und Forschungsförderung, Heft 60, Dezember 1997
- /2/ Rahmenrichtlinien Sekundarschule, Schuljahrgänge 7 bis 10, Mathematik. Land Sachsen-Anhalt, 1999
- /3/ Rahmenrichtlinien Gymnasium/Fachgymnasium, Mathematik. Land Sachsen-Anhalt, 1999
- /4/ Harms, Ute; Bündler, Wolfgang: Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: Kumulatives Lernen. – Erläuterungen zu Modul 5. – Unveröffentlichtes Material zum BLK-Programm SINUS, September 1999
- /5/ Griesel; Postel (Hrsg.): Lehrbuch „Mathematik heute“ 8. Schuljahr, Schroedel Schulbuchverlag GmbH, Hannover 1995
- /6/ Mat(h)erialien 7-10 – Algebra, Handbuch für Lehrerinnen und Lehrer, bearbeitet von: Cohrs-Streloke, Klöckner, Kuchenbecker, Lessmann, Lunze, Ruschnitz, Dr. Schröder, Prof. Wurl, Schroedel Verlag GmbH, Hannover 1996
- /7/ Maroska, Olpp, Stöckle, Wellstein (Hrsg.): Schnittpunkt 8 – Mathematik für Sekundarschulen in Sachsen-Anhalt, Ernst Klett Schulbuchverlag, Leipzig/Stuttgart/Düsseldorf; Leipzig 1997
- /8/ Allnoch, J.; Bock, V.; Pruzina, M.: Erfahrungen mit „echten“ Textaufgaben. In: Mathematik in der Schule, Berlin 31(2000)3, S. 151 ff.
- /9/ Baumert, Jürgen: Fachbezogenes – fächerübergreifendes Lernen/Erweiterte Lern- und Denkstrategien (Forum 5). In: Wissen und Werte für die Welt von morgen. Dokumentation zum Bildungskongreß, München 1998
- /10/ Materialien zum Mathematikunterricht, BLK-Programm Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts:
 - (a) Vollrath, Hans-Joachim: Themenstränge, Themenkreise und Themenkomplexe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I – Anregungen zu Modul 5, Würzburg, Februar 1999
 - (b) Hertrampf, M.: Erfahren von Kompetenzzuwachs im Mathematikunterricht – Unterrichtsbeispiele zu Modul 5, Kiel, Oktober 1999
 - (c) Baptist, Peter: Elemente einer neuen Aufgabenkultur – Anregungen zu den Modulen 1 und 5, Bayreuth, November 1998

Quellenangaben

Dieses Material entstand in einem Diskussionsprozess, an dem alle Arbeitsgruppenmitglieder beteiligt waren. Die Aufgaben wurden zusammengetragen auf Grund der Erfahrungen; Ursprünge und Quellen lassen sich daher in der Regel nicht mehr genau lokalisieren. Zahlreiche Aufgaben können wohl auch als Allgemeingut angesehen werden. Zu Aufgaben, die aus anderen Büchern entnommen wurden, sind an entsprechender Stelle die Quellen angegeben.