KULTUSMINISTERIUM DES LANDES SACHSEN-ANHALT

Abitur
April/Mai 2004

Mathematik
(Grundkurs)

Arbeitszeit: 210 Minuten

Der Prüfling wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten G 1, G 2 und G 3 zur Bearbeitung aus.

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

Gebiet G 1		Gebiet G 2		Gebiet G 3	
Aufgabe 1.1	☐	Aufgabe 2.1	☐	Aufgabe 3.1	☐
Aufgabe 1.2	☐	Aufgabe 2.2	☐	Aufgabe 3.2	☐

Unterschrift Prüfling:

Gebiet G 1

Aufgabe 1.1
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$y = f(x) = -1 + \frac{1}{x}, \quad x \in D_f \quad \text{und}$$

$$y = g(x) = \ln x, \quad x \in R, x > 0.$$

Ihre Graphen werden mit F bzw. G bezeichnet.

a) Ermitteln Sie den größtmöglichen Definitionsbereich D_f der Funktion f.

Untersuchen Sie die Funktion f auf Monotonie und auf die Existenz von lokalen Extrema.

Untersuchen Sie den Graphen F auf Symmetrie zur y-Achse und auf Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung.

Zeichnen Sie den Graphen F im Intervall $-6 \leq x \leq 6$.

b) Weisen Sie nach: Die Graphen F und G schneiden einander in genau einem Punkt P.

Ermitteln Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Graphen F und G einander im Punkt P schneiden.

Die Tangenten an die Graphen F und G im Punkt P schließen mit der y-Achse eine Dreiecksfläche ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieser Dreiecksfläche.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion h mit der Gleichung $h(x) = x \cdot \ln x - x$ eine Stammfunktion der Funktion g ist.

Die Graphen F und G und die Gerade mit der Gleichung x = 2 begrenzen vollständig eine Fläche.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Gebiet G 1 **Aufgabe 1.2**
Analysis

Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = 10\,(e^{x} - e^{2x})\,, \qquad x \in R.$$

Der Graph der Funktion f wird mit G bezeichnet.

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, Monotonie und ihr Verhalten für $x \to \pm\infty$.

Ermitteln Sie Art und Lage des lokalen Extrempunktes des Graphen G.

Der Graph G hat den Wendepunkt $W\left(-2\ln 2 \mid \frac{15}{8}\right)$.
Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-5 \le x \le 0$.

b) Der Graph G, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = -3{,}5$ schließen eine Fläche F_1 vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

c) Die Tangente t an den Graphen G im Koordinatenursprung, die Gerade s durch die Punkte $P(-3{,}5 \mid 0)$ und $Q(0 \mid 3)$ sowie die x-Achse begrenzen eine weitere Fläche F_2 vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Berechnen Sie die prozentuale Abweichung des Inhalts der Fläche F_2 vom Inhalt der Fläche F_1.

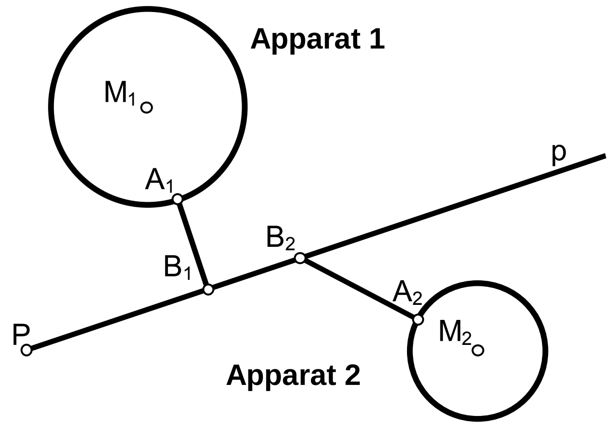
d) Es existiert ein Punkt R des Graphen G im Intervall $-1 \le x \le 0$, der vom Koordinatenursprung einen maximalen Abstand hat.
Zeigen Sie mithilfe eines Beispiels, dass dieser Punkt R nicht der lokale Extrempunkt des Graphen G ist.

Gebiet G 2

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Zwei Apparate haben die Form gerader Kreiszylinder. Sie sollen an eine Rohrleitung p, die vom Punkt P(0 | –1) in Richtung des Vektors $\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ verläuft, angeschlossen werden.

Die Apparate und die Rohrleitungen sind im Grundriss dargestellt.
Der Verlauf der Rohrleitungen kann durch Punkte von Geraden charakterisiert werden, die alle in der Grundrissebene liegen.
Ihre analytische Beschreibung erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem, wobei eine Einheit einem Meter entspricht.



(Abbildung nicht maßstäblich)

a) Vom Punkt $B_1(6 \mid y_{B_1})$ der Rohrleitung p wird der Apparat 1 im Punkt $A_1(5 \mid 4)$ angeschlossen. Der Grundriss dieses Apparates ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M_1(4 \mid 7)$.

Ermitteln Sie eine Gleichung dieses Kreises.

Berechnen Sie die Länge der Anschlussleitung $\overline{A_1 B_1}$.

Zeigen Sie, dass die Anschlussleitung $\overline{A_1 B_1}$ sowohl senkrecht zur Rohrleitung p als auch senkrecht zur Tangente des Grundrisskreises des Apparates 1 im Punkt A_1 verläuft.

b) Der Grundriss des Apparates 2 ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt $M_2(15 \mid -1)$. Dieser Apparat soll im Punkt $A_2(13 \mid 0)$ durch eine Leitung angeschlossen werden, die im Winkel von 45° zur Rohrleitung p verläuft.

Begründen Sie, dass dafür als Anschlusspunkt der Punkt $B_2(9 \mid 2)$ auf der Rohrleitung p in Frage kommen kann.

Weisen Sie nach, dass die Punkte A_2, B_2 und M_2 auf ein und derselben Geraden liegen.

Die Rohrleitung p soll aus Sicherheitsgründen einen Abstand von mindestens 2,50 m zum Apparat 2 haben.
Prüfen Sie, ob diese Sicherheitsbestimmung eingehalten wird.

Gebiet G 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem seien gegeben
die Punkte A(8 | – 4) und P(–6 | 6) sowie die Gerade g durch

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der Geraden durch die Punkte A und P sowie das Gradmaß des Schnittwinkels beider Geraden.

b) Gegeben seien Kreise durch

$$(x - [1 + 5n])^2 + (y - [1 + 7n])^2 = 74(1 + n^2), \qquad n \in Z.$$

Zeigen Sie, dass der Punkt A auf jedem dieser Kreise liegt.

Geben Sie die Gleichung jenes Kreises k an, für den n = 0 ist.

Weisen Sie nach, dass die Strecke $\overline{AP}$ Durchmesser des Kreises k ist.

c) Die Gerade g schneidet den Kreis k aus Aufgabe b in genau zwei Punkten B und C. Berechnen Sie die Koordinaten dieser Punkte.

Diese Punkte bilden mit dem Punkt A das Dreieck ABC.
Zeigen Sie: Fällt man vom Punkt P aus die Lote auf jede der Seiten des Dreiecks ABC bzw. deren Verlängerungen, so liegen die sich ergebenden Lotfußpunkte auf genau einer Geraden.

Gebiet G 3

Aufgabe 3.1
Stochastik

Bei einer Wahl haben 10% der Wähler für die Partei Z gestimmt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse für jeweils 100 zufällig ausgewählte Wähler:
   A: Genau 10 Wähler haben die Partei Z gewählt.
   B: Weniger als 10 Wähler haben die Partei Z gewählt.

Die Zufallsgröße X sei die Anzahl der Wähler der Partei Z in einer Stichprobe von 500 Wählern.

b) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X binomialverteilt ist.

   Ermitteln Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsgröße X.

   Berechnen Sie, wie groß eine Stichprobe mindestens sein muss, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie keinen Wähler der Partei Z enthält, höchstens 10 % beträgt.

Durch frühere Befragungen in der wahlberechtigten Bevölkerung ist ermittelt worden, dass die politischen Zielstellungen der Partei Z einen Bekanntheitsgrad von 70 % haben. Rechtzeitig vor der nächsten Wahl möchte die Partei Z durch eine Befragung von 1500 zufällig ausgewählten wahlberechtigten Personen überprüfen, ob sich dieser Bekanntheitsgrad verringert hat. Sollten höchstens 1020 befragte Personen mit den Zielstellungen bekannt sein, so will die Partei Z eine Werbekampagne starten.

c) Geben Sie dafür eine Nullhypothese H_0, die zugehörige Gegenhypothese H_1 und den Ablehnungsbereich für H_0 an.

Gebiet G 3 **Aufgabe 3.2**
Stochastik

Ein Batterieproduzent hat Batterien einer bestimmten Sorte im Dauerbetrieb geprüft. Es ist festgestellt worden, dass die Wahrscheinlichkeit für den vorzeitigen Ausfall einer Batterie 20 % beträgt.

a) Ermitteln Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse.
A: Von 100 Batterien fallen weniger als 20 vorzeitig aus.
B: Von 200 Batterien fallen mehr als 30 vorzeitig aus.
C: Von zehn Batterien fallen genau zwei vorzeitig aus.

b) Berechnen Sie, wie groß der Anteil der vorzeitig ausfallenden Batterien mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % unter 50 Batterien mindestens eine vorzeitig ausfällt.

c) In Auswertung umfangreicher Batterieprüfungen vermutet man, dass der Anteil vorzeitig ausfallender Batterien weniger als 5 % beträgt. Um diese Vermutung zu beurteilen, wird eine Stichprobe von 100 Batterien geprüft und ein Signifikanztest durchgeführt. Die Zufallsgröße X beschreibe dabei die Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien.

Ermitteln Sie zu der Nullhypothese „$H_0 : p_0 \geq 0{,}05$“ den größtmöglichen linksseitigen Ablehnungsbereich $\overline{A}$ auf dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}1$.

Gebiet G 1 **Aufgabe 1.1**
Analysis

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	1	Ermitteln des größtmöglichen Definitionsbereichs, z. B.: D_f: $x \in R \ \wedge \ x \neq 0$
	5	Untersuchen auf Monotonie und Existenz lokaler Extrema, z. B.: $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'(x) < 0$ für alle $x \in D_f$ $\Rightarrow$ f ist monoton fallend für $-\infty < x < 0$ und $0 < x < \infty$ notwendige Bedingung für lokale Extrema nicht erfüllt $\Rightarrow$ Es existieren keine lokalen Extrema.
	4	Untersuchen auf Symmetrie, z. B.: $f(-x) \neq f(x)$ bzw. $f(-x) \neq -f(x)$ $\Rightarrow$ weder gerade noch ungerade Funktion $\Rightarrow$ Der Graph F liegt nicht symmetrisch zur y-Achse und nicht symmetrisch zum Koordinatenursprung.
	3	Zeichnen des Graphen F
b)	5	Nachweis, z. B.: (1) f(1) = g(1) $\Rightarrow$ Existenz eines Schnittpunktes, (2) Für x < 1 gilt f(x) > 0 und g(x) < 0. Für x > 1 gilt f(x) < 0 und g(x) > 0. Schlussfolgerung aus (1) und (2): Es existiert genau ein Schnittpunkt.
	6	Ermitteln des Gradmaßes des Schnittwinkels im Punkt P, z. B.: (1) Anstieg m_1 der Tangente an F im Punkt P: $m_1 = f'(1) = -1$ (2) Anstieg m_2 der Tangente an G im Punkt P: $m_2 = g'(1) = 1$ (3) $m_1 \cdot m_2 = -1$ $\Rightarrow$ Schnittwinkel: 90°
	3	Berechnen der Maßzahl des Flächeninhalts: A = 1
c)	3	Zeigen, dass h Stammfunktion zu g ist, z. B.: h'(x) = g(x)
	5	Berechnen der Maßzahl des Inhalts der Fläche, z. B.: $\int_1^2 (g(x) - f(x))dx = \int_1^2 \left(\ln x - (-1 + \frac{1}{x}) \right) dx = [x \ln x - \ln x]_1^2 = \ln 2 \approx 0{,}693$
	35	

Gebiet G 1 **Aufgabe 1.2**
Analysis

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	8	Untersuchen der Funktion auf Nullstellen, Monotonie und Verhalten im Unendlichen, z. B.: Nullstellen: x = 0 Monotonie: monoton wachsend für $-\infty < x < \ln 0{,}5$ monoton fallend für $\ln 0{,}5 < x < \infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
	5	Ermitteln von Art und Lage des lokalen Extrempunktes, z. B.: hinreichende Bedingung für H(ln 0,5 | 2,5) erfüllt, wobei f''(ln 0,5) = −5 H ist ein Hochpunkt.
	3	Zeichnen des Graphen
b)	5	Berechnen der Maßzahl des Inhalts der Fläche F_1, z. B.: $A_1 = \int\limits_{-3,5}^{0} f(x)dx = \left[10e^x - 5e^{2x}\right]_{-3,5}^{0} \approx 4{,}70$
c)	8	Berechnen der Maßzahl des Inhalts der Fläche F_2, z. B.: Gleichung der Tangente t: y = –10x Gleichung der Geraden s: $y = \frac{6}{7}x + 3$ y-Koordinate des Schnittpunktes von t und s: $y_s = \frac{105}{38} \approx 2{,}76$ $A_2 = \frac{1}{2} \cdot 3{,}5 \cdot \frac{105}{38} \approx 4{,}84$
	1	Berechnen der prozentualen Abweichung: ≈ 3,0 %
d)	5	Zeigen, dass R nicht der lokale Extrempunkt ist, z. B.: d(O, H)= $\sqrt{(\ln 0{,}5)^2 + 2{,}5^2} \approx 2{,}594$ Beispiel mit P(–0,75 | y): d(O, P) ≈ 2,603 > d(O, H) ⇒ R ist nicht der lokale Extrempunkt des Graphen G.
	35	

Gebiet G 2

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

Auf-gabe	BE	Hinweise, Lösungen
a)	2	Ermitteln einer Gleichung des Kreises, z. B.: $(x-4)^2 + (y-7)^2 = 10$
	4	Ermitteln der Länge der Leitung, z. B.: p: $y = \frac{1}{3}x - 1, \quad \Rightarrow \quad y_B = 1, \quad \overline{A_1B_1} = \sqrt{10}$ Länge der Anschlussleitung: 3,16 m
	5	Zeigen des senkrechten Verlaufs zur Geraden p und zur Tangente t, z. B.: $\overrightarrow{A_1B_1} \cdot \vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{A_1B_1} \perp p$ t: $x - 3y = -7 \quad m_t = m_p = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \overline{A_1B_1} \perp t$
b)	3	Begründen, dass der Punkt B_2 in Frage kommt, z. B.: $\cos\angle(p, \overline{A_2B_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \angle(p, \overline{A_2B_2}) = 45°$
	2	Nachweisen, dass die Punkte auf genau einer Geraden liegen, z. B.: $\overrightarrow{B_2M_2} = \frac{3}{2} \cdot \overrightarrow{B_2A_2} \quad \Rightarrow$ Die Punkte A_2, B_2 und M_2 liegen auf genau einer Geraden.
	4	Prüfen, ob Sicherheitsbestimmung eingehalten wird, z. B.: L sei der Fußpunkt des Lotes M_2 auf p, ΔB_2M_2L ist rechtwinklig und gleichschenklig. $\Rightarrow \quad \overline{M_2L} = \frac{\overline{B_2M_2}}{\sqrt{2}} = 3 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}}, \quad r_2 = \overline{A_2M_2}$ $\overline{M_2L} - r_2 = (3 \cdot \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{5}) \approx 2{,}51 > 2{,}50$ $\Rightarrow$ Die Sicherheitsbestimmung wird eingehalten.
	20	

Gebiet G 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

Auf-gabe	**BE**	**Hinweise, Lösungen**
a)	7	Berechnen der Koordinaten des Schnittpunktes und des Gradmaßes des Schnittwinkels, z. B.: $g_{AP}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r \in R$ $g_{AP} \cap g \Rightarrow S(-\frac{236}{23} \mid \frac{208}{23})$ $\cos\varphi = \frac{47}{74}\sqrt{2} \Rightarrow \varphi \approx 26{,}1°$
b)	2	Zeigen, dass der Punkt A auf jedem der Kreise liegt, z. B.: $(7 + 5n)^2 + (-5 + 7n)^2 = 74 + 74n^2 = 74(1 + n^2)$ w. A. für alle $n \in Z$ $\Rightarrow$ A ist Punkt jedes Kreises.
	1	Angeben der Kreisgleichung für n = 0, z. B.: $k: (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 74$
	2	Nachweisen des Durchmessers, z. B.: Mittelpunkt der Strecke $\overline{AP}$ ist gleichzeitig Kreismittelpunkt M(1 | 1).
c)	5	Berechnen der Koordinaten der Schnittpunkte, z. B.: $(7 - 6t)^2 + (5 + t)^2 = 74 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 2 \Rightarrow B(8 \mid 6), C(-4 \mid 8)$
	3	Zeigen, dass die Lotfußpunkte auf genau einer Geraden liegen, z. B.: Strecke $\overline{AP}$ ist Durchmesser des Kreises k . $\Rightarrow$ (1) Das Lot von P auf die Dreieckseite b hat als Fußpunkt den Punkt C (Satz des Thales). (2) Das Lot von P auf die Dreieckseite c hat als Fußpunkt den Punkt B (Satz des Thales). (3) Die Dreieckseite a liegt auf der Geraden durch die Punkte B und C. (1), (2), (3) $\Rightarrow$ Das Lot von P auf die Dreiecksseite a liegt damit auf der Verbindungsgeraden der beiden anderen Lotfußpunkte und somit liegen alle drei Lotfußpunkte auf genau einer Geraden.
	20	

Gebiet G 3

Aufgabe 3.1
Stochastik

Auf-gabe	**BE**	**Hinweise, Lösungen**
a)	3	Berechnen der Wahrscheinlichkeiten, z. B.: Zufallsgröße ist binomialverteilt mit $B_{100;\,0,1}$ $P(A) = B_{100;\,0,1}(\{10\}) = 0{,}1319$ $P(B) = B_{100;\,0,1}(\{0;\ 1;\ldots;\ 9\}) = 0{,}4513$
b)	3	Begründen, dass ZG X binomialverteilt ist, z. B.: (1) Jeder Wähler hat genau zwei Entscheidungsmöglichkeiten. (2) Für jeden Wähler beträgt die Wahrscheinlichkeit p = 0,1 (Erfolgswahrscheinlichkeit), dass er die Partei Z wählt. (3) Alle Wähler wählen unabhängig voneinander.
	2	Ermitteln von Erwartungswert und Varianz, z. B.: E(X) = 50; V(X) = 45
	4	Berechnen des Stichprobenumfangs, z. B.: $P(X = 0) \leq 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad \binom{n}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^n \leq 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad n > 21{,}85$ Mindestumfang der Stichprobe: 22
c)	3	Angeben der Hypothesen und des Ablehnungsbereiches, z. B.: Nullhypothese H_0: $p_0 = 0{,}7$ Gegenhypothese H_1: $p_1 < 0{,}7$ Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0;\ 1;\ \ldots;\ 1020\}$
	15	

Gebiet G 3 **Aufgabe 3.2**
Stochastik

Auf-gabe	**BE**	**Hinweise, Lösungen**
a)	6	Ermitteln der Wahrscheinlichkeiten, z. B.: X_n: Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien; $X_n \sim B_{n;\,0,2}$ $P(A) = P(X_{100} \leq 19) = B_{100;\,0,2}(\{0; 1; ...; 19\}) = 0{,}4602$ $P(B) = P(X_{200} > 30) = 1 - B_{200;\,0,2}(\{0; 1; ...; 30\}) = 1 - 0{,}0430 = 0{,}9570$ $P(C) = P(X_{10} = 2) = B_{10;\,0,2}(\{2\}) = 0{,}3020$
b)	5	Berechnen des Mindestanteils, z. B.: X_p: Anzahl der vorzeitig ausfallenden Batterien; $X_p \sim B_{50;\,p}$ $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99 \quad \Leftrightarrow \quad P(X_p = 0) \leq 0{,}01$ $P(X_p = 0) = (1-p)^{50}$ $(1 - p)^{50} \leq 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad p \geq 1 - \sqrt[50]{0{,}01} \quad \Rightarrow \quad p \geq 0{,}0879...$ Mindestanteil: $\approx$ 8,8 %
c)	4	Ermitteln des linksseitigen Ablehnungsbereichs, z. B.: $\overline{A} = \{0; 1; \ldots; k\}$; $P(X \leq k) = P(\overline{A}) \leq 0{,}1$ $B_{100;\,0,05}(\{0; 1; ...; k\}) \leq 0{,}1 \quad \Rightarrow \quad k = 1;\ \overline{A} = \{0; 1\}$;
	15	