SACHSEN-ANHALT

Kultusministerium

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2009

Mathematik
(Leistungskursniveau)

Arbeitszeit: 300 Minuten

Es sind die drei Pflichtaufgaben und eine Wahlpflichtaufgabe zu lösen.
Der Prüfling entscheidet sich für eine Wahlpflichtaufgabe.

Die zur Bewertung vorgesehene Wahlpflichtaufgabe ist vom Prüfling anzukreuzen.

☐ Wahlpflichtaufgabe 4.1

☐ Wahlpflichtaufgabe 4.2

____
Unterschrift

Pflichtaufgaben **Aufgabe 1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f und g_a durch

$$y = f(x) = \frac{3}{32}x^3 - \frac{9}{16}x^2 + 3 \quad , \qquad x \in R ,$$

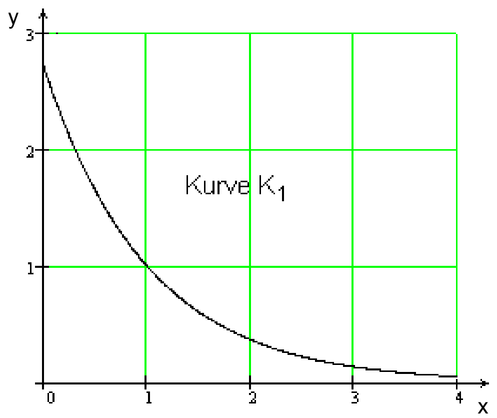
$$y = g_a(x) = \frac{1}{e^{ax-1}} \quad , \qquad x \in R , a \in R .$$

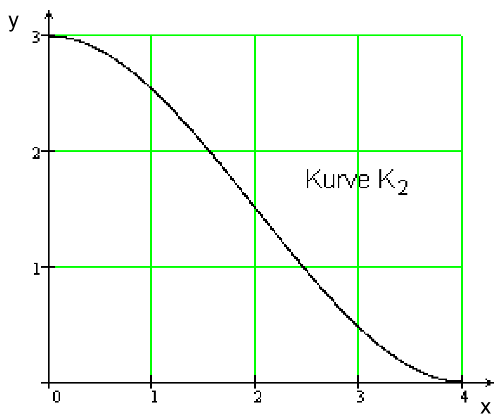
a) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Existenz lokaler Extrempunkte sowie Wendepunkte und berechnen Sie die zugehörigen Koordinaten.

Untersuchen Sie die Funktionen g_a auf Monotonie.

Die dargestellten Kurven sind Graphen der Funktion f bzw. einer der Funktionen g_a im Intervall [0; 4].
Geben Sie drei Eigenschaften der Funktion f an, mit denen man begründen kann, dass die Kurve K_2 Graph der Funktion f ist.

Ermitteln Sie unter Verwendung des dargestellten Graphen einer Funktion g_a den zu diesem Graphen zugehörigen Wert des Parameters a.





Ein Designer will die Kurven K_1 und K_2 als Profile von Rutschen wählen und benötigt Aussagen über deren Gefälle. Ein Maß für das Gefälle sei der entgegengesetzte Wert des Anstieges der Kurven K_1 bzw. K_2. Eine Einheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter.

b) Geben Sie für jede Rutsche an, an welcher Stelle das Gefälle am größten ist und berechnen Sie jeweils das Maß dieses Gefälles.

Berechnen Sie das durchschnittliche Gefälle derjenigen Rutsche, deren Profil durch die Kurve K_2 bestimmt ist.

c) Die Rutsche, deren Profil durch die Kurve K_1 bestimmt ist, soll beiderseits eine ebene Verkleidung erhalten (siehe Abbildung).
Berechnen Sie den Inhalt der zu verkleidenden Fläche.

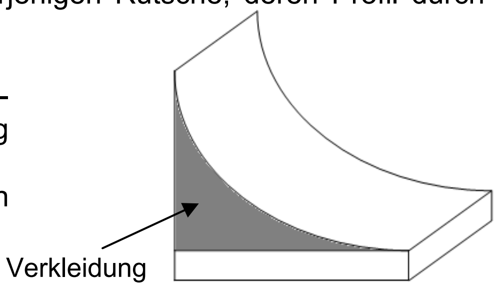


Abbildung (nicht maßstäblich)

d) Das durch den Graphen der Funktion f beschriebene Profil einer Rutsche soll wie folgt verändert werden: Der Graph der Funktion f wird im Intervall $0 \le x \le 3$ durch den Graphen einer linearen Funktion h so ersetzt, dass ein knickfreier Anschluss an den Graphen der Funktion f im Punkt P(3 | f(3)) vorhanden ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser linearen Funktion h und begründen Sie, dass von dieser Veränderung das durchschnittliche Gefälle der Rutsche nicht betroffen ist.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Viereck ABCD durch die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(2 \mid 4 \mid 4)$, $C(-4 \mid 10 \mid 1)$ und $D(-6 \mid 6 \mid -3)$ gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

Begründen Sie, dass nur die Rechteckseite $\overline{CD}$ die xy-Ebene durchstößt.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, in dem die Rechteckseite $\overline{CD}$ die xy-Ebene durchstößt, sowie das Gradmaß des Winkels, den die Rechteckseite $\overline{CD}$ mit der xy-Ebene einschließt.

b) Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene ε, in der das Rechteck ABCD liegt.

Gegeben sei der Punkt $E(4 \mid 2 \mid -4)$, so dass das Dreieck ABE Grundfläche eines geraden Prismas ABEDCF ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes F und die Maßzahl des Volumens dieses Prismas.

Es gibt genau zwei Geraden g_1 und g_2, auf denen weitere Punkte E_{g_1} bzw. E_{g_2} liegen, so dass die Dreiecke ABE_{g_1} bzw. $AE_{g_2}B$ jeweils Grundflächen von geraden Prismen mit der Seitenfläche ABCD sind, die das gleiche Volumen wie das Prisma ABEDCF haben.
Ermitteln Sie für diese Geraden g_1 und g_2 jeweils eine Gleichung.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Zur Herstellung von Getränkeflaschen wird ein Kunststoffgemisch PET aus farblosen und farbigen Chips verwendet, das nach Einschmelzen einen einheitlichen Farbton ergibt.
Für Flaschen eines bestimmten Getränkes wird eine Mischung aus farblosen und farbigen Chips im Verhältnis 5 : 1 verwendet.
In Stichproben mit einem Umfang von n Chips beschreibe die Zufallsgröße X_n die Anzahl der farbigen Chips.

a) Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X_n als binomialverteilt mit den Parametern n und $p = \frac{1}{6}$ (kurz: $X_n \sim B_{n;\frac{1}{6}}$) angenommen werden kann.

Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich

- in einer Stichprobe von 50 Chips höchstens 10 farbige Chips befinden,
- in einer Stichprobe von 35 Chips genau 5 farbige Chips befinden,
- in einer Stichprobe von 300 Chips höchstens 40 farbige Chips befinden.

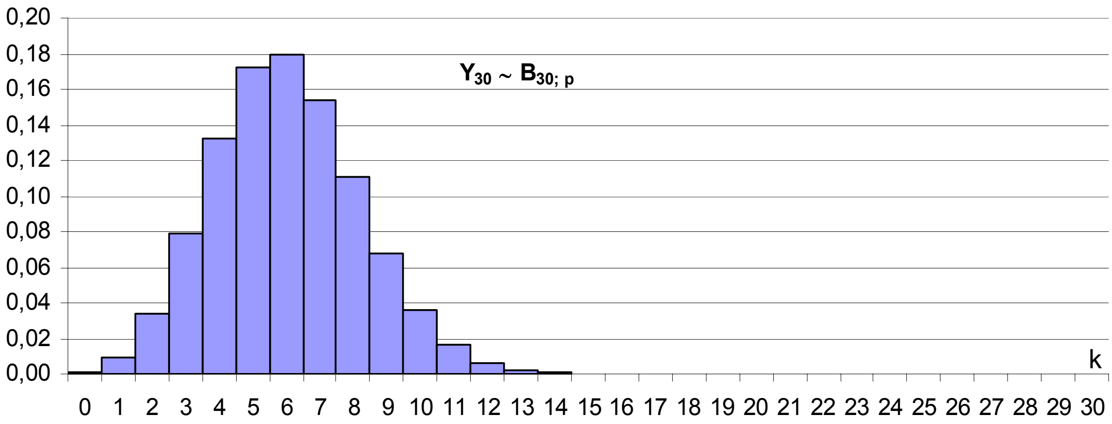
b) Es soll geprüft werden, ob es signifikante Abweichungen vom Mischungsverhältnis 5 : 1 gibt. Dazu wird eine Stichprobe von 100 Chips untersucht.
Konstruieren Sie hierfür einen zweiseitigen Signifikanztest mit dem Signifikanzniveau $\alpha = 0{,}05$ und formulieren Sie eine Entscheidungsregel.

c) Von einer binomialverteilten Zufallsgröße Y_{30}, die die Anzahl der farbigen Chips in einer Stichprobe vom Umfang $n = 30$ eines neuen Mischungsverhältnisses angibt, ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung in einem Histogramm gegeben.

Der Erwartungswert der Zufallsgröße Y_{30} ist eine ganze Zahl.
Ermitteln Sie diesen Erwartungswert und den Wert des Parameters p der Binomialverteilung von Y_{30} sowie das neue Mischungsverhältnis.

Ermitteln Sie an Hand des Histogramms die Zahl k, so dass $P(|Y_{30} - 6| \leq k) \approx 0{,}75$.

Nennen Sie zwei Merkmale, in denen sich die Histogramme der Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Zufallsgrößen X_{30} und Y_{30} voneinander unterscheiden.



Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a und h_a durch

$y = f_a(x) = \ln ax$, $x \in R$, $x > 0$ und $a \in R$, $a \geq 1$,
$y = h_a(x) = f_a(x) - f_1(x)$, $x \in R$, $x > 0$ und $a \in R$, $a > 1$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktionen f_a und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f_1 und $f_{1,5}$ im Intervall $0 < x \leq 8$ in ein und dasselbe Koordinatensystem.

b) Das bestimmte Integral $\int_1^5 \pi[h_{1,5}(x)]^2\,dx$ ist in folgenden Schritten richtig berechnet worden.

$$\int_1^5 \pi[h_{1,5}(x)]^2\,dx = \int_1^5 \pi\left[\ln\frac{3}{2} + \ln x - \ln x\right]^2 dx = \left[\pi x\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2\right]_1^5 = 4\pi\left(\ln\frac{3}{2}\right)^2$$

Erklären Sie diese Lösungsschritte.

c) Die Graphen der Funktionen f_1 und $f_{1,5}$ sowie die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ und die Gerade mit der Gleichung $x = 5$ schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Bei Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper.
Zur Berechnung der Maßzahl des Volumens dieses Rotationskörpers ist folgender Ansatz aufgestellt worden: $V = \int_1^5 \pi[h_{1,5}(x)]^2\,dx$.

Beurteilen Sie diesen Ansatz.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.2**
Analytische Geometrie

Der Verlauf von zwei Transportbändern im ebenen Gelände wird in einem kartesischen Koordinatensystem durch die Strecken s_1 und s_2 beschrieben. Eine Einheit entspricht einem Meter.

$$s_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -9 \\ -12 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u \in R,\ 0 \le u \le 3,$$

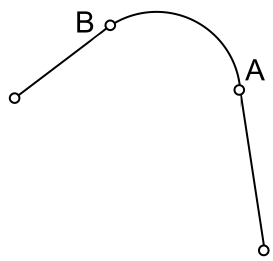
$$s_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 18 \\ -26 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v \in R,\ 0 \le v \le 20\ .$$

a) Jeder der Punkte A(18 | – 6) und B(0 | 0) liegt auf genau einer der Strecken s_1 und s_2. Ermitteln Sie, welcher Punkt auf welcher Strecke liegt.

Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Geraden, auf denen die Strecken s_1 und s_2 liegen, zueinander verlaufen.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Strecken s_1 und s_2 einander nicht schneiden.

b) Vom Punkt A zum Punkt B verläuft ein Transportband kreisförmig, so dass die Geraden, auf denen die Strecken s_1 und s_2 liegen, Tangenten des entsprechenden Kreises sind (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes und den Radius dieses Kreises sowie die Länge des kreisförmig verlaufenden Transportbandes.