

KULTUSMINISTERIUM DES LANDES SACHSEN-ANHALT



Abitur 2001

Mathematik
(Leistungskurs)

Arbeitszeit: 300 Minuten

Der Prüfling wählt nach Empfehlung durch die Lehrkraft je eine Aufgabe aus den Gebieten L 1, L 2 und L 3 zur Bearbeitung aus.

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

Gebiet L 1	Gebiet L 2	Gebiet L 3
Aufgabe 1.1	Aufgabe 2.1	Aufgabe 3.1
Aufgabe 1.2	Aufgabe 2.2	Aufgabe 3.2
		Aufgabe 3.3

Unterschrift Prüfling:

Gebiet L 1**Aufgabe 1.1
Analysis**

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = -\frac{1}{a}(x-4)^2(x+2), \quad a, x \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Die Graphen der Funktionen f_a seien mit F_a bezeichnet.

- a) Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktionen f_a .

Zeigen Sie, dass die Graphen F_a die x -Achse in genau einem Punkt schneiden und geben Sie dessen Koordinaten an.

Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte W_a der Graphen F_a .

[Teilergebnis zur Kontrolle: $W_a(2 \mid f_a(2))$]

Zeichnen Sie den Graphen F_8 im Intervall $-3 \leq x \leq 8$.

- b) Weisen Sie nach, dass die Koordinaten der Wendepunkte W_a der Graphen F_a jeweils das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der Extrempunkte der Graphen F_a sind.
Interpretieren Sie diese Eigenschaft aus geometrischer Sicht.
- c) Durch jeden Wendepunkt W_a und den Koordinatenursprung verläuft jeweils eine Gerade g_a . Diese schneidet den jeweiligen Graphen F_a in genau zwei weiteren Punkten P_a und Q_a .
Weisen Sie nach, dass gilt: $\overline{W_a P_a} = \overline{W_a Q_a}$.
- d) Jeder Graph F_a und die Koordinatenachsen begrenzen für $x \geq 0$ eine Fläche vollständig. Die in Teilaufgabe c) beschriebene Gerade g_a teilt diese Fläche in einem konstanten Verhältnis.
Berechnen Sie dieses Verhältnis.

Gebiet L 1

Aufgabe 1.2
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = \frac{1}{a+x^2}, \quad a, x \in \mathbb{R}, a > 0$$

und die Funktion g durch $g(x) = \frac{1}{4x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, x \neq 0.$

Die Graphen von f_a seien mit F_a und der Graph von g sei mit G bezeichnet.

- a) Untersuchen Sie die Graphen F_a auf Symmetrie und zeigen Sie, dass die x -Achse Asymptote ist.

Ermitteln Sie die Koordinaten und die Art der lokalen Extrempunkte der Graphen F_a .

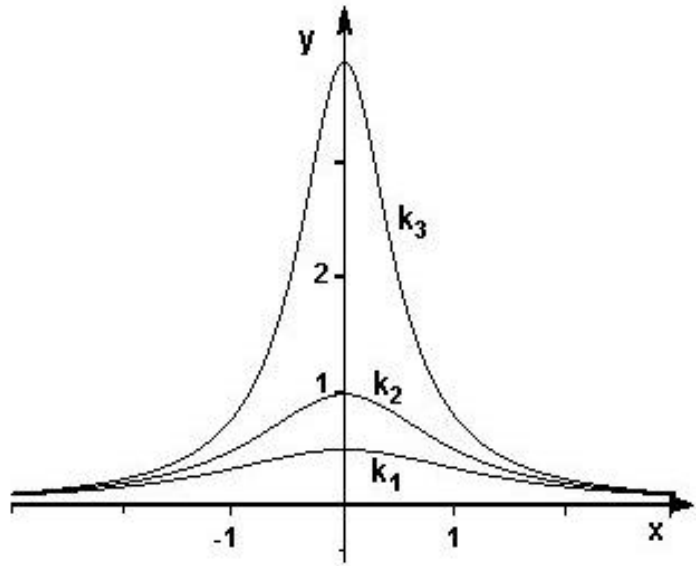
Jeder Graph F_a besitzt genau zwei Wendepunkte W_a .

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Wendepunkte.

[Teilergebnis zur Kontrolle:

$$W_{a,1,2}(\pm \frac{1}{3}\sqrt{3 \cdot a} \mid f_a(\pm \frac{1}{3}\sqrt{3 \cdot a}))]$$

Jede in nebenstehender Abbildung dargestellte Kurve gehört zu einem der Graphen F_a .



Ordnen Sie diese Kurven den Graphen F_a zu, indem Sie den jeweiligen Wert des Parameters a angeben.

Weisen Sie nach, dass die Wendepunkte W_a auf dem Graphen G liegen.

Zeichnen Sie den Graphen G im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ in das nebenstehende Koordinatensystem.¹

- b) Im Punkt $Q(x_0 \mid g(x_0))$ mit $x_0 > 0$ wird an den Graphen G die Tangente t gelegt. Die zur Tangente t im Punkt Q senkrecht verlaufende Gerade n geht durch den Koordinatenursprung.

Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes Q .

- c) Der Graph G , die Gerade n (aus Teilaufgabe b)), die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ und die x -Achse begrenzen eine Fläche vollständig.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche.

Durch Rotation des Graphen G im Intervall $0,5 \leq x \leq 2$ um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper.

Ermitteln Sie die Maßzahl des Volumens des Rotationskörpers.

¹ **Hinweis:** Das Aufgabenblatt ist mit dem Namen zu beschriften und der Prüfungsarbeit beizufügen.

Gebiet L 2

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind der Punkt $P(1|9|5)$ sowie

$$\text{die Gerade } g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben.

- a) Die Gerade g und der Punkt P bestimmen eine Ebene.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene E .

Berechnen Sie das Gradmaß des Neigungswinkels der Ebene E zur xy -Ebene.

Die Gerade g beschreibt in dem zu betrachtenden Bereich den Verlauf eines Bahngleises, auf dem Schüttgut für eine Industrieanlage angeliefert wird und von hier auf geradlinig verlaufenden Förderbändern zum Bunker im Punkt P befördert werden soll. Der Anstiegswinkel der Förderbänder (Winkel zur Horizontalebene) darf dabei nicht mehr als 50° betragen. Die Höhe im Koordinatensystem entspricht 10 m. Die xy -Ebene sei die Horizontalebene.

- b) Als Trassen für die Förderbänder sind die Strecken $\overline{A_1P}$ und $\overline{A_2P}$ vorgesehen, wobei die Punkte $A_1(-4 | y_1 | z_1)$ und $A_2(4 | y_2 | z_2)$ auf der Geraden g liegen.
Weisen Sie nach, dass diese Strecken die gleiche Länge sowie den gleichen Anstieg besitzen und ermitteln Sie das Gradmaß des Anstiegswinkels.

Berechnen Sie die Länge der kürzesten Strecke zwischen dem Gleis und dem Punkt P und prüfen Sie, ob auch diese Strecke als Trasse für die Förderbänder geeignet ist.

- c) Für eine Videoüberwachung, deren Kontrollbereich durch die Punkte einer Kugel mit der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 24y - 6z + 129 = 0$ begrenzt wird, soll im Mittelpunkt M dieser Kugel eine Kamera installiert werden.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes M sowie die Reichweite r der Videoüberwachung.

Zeigen Sie, dass nicht alle Förderbänder vollständig im Kontrollbereich liegen.

Als Standort für die Videokamera soll nun ein Punkt M' so gewählt werden, dass die Punkte A_1 , A_2 (siehe Aufgabe b)) und P auf der den Kontrollbereich begrenzenden Kugel mit dem Mittelpunkt M' liegen. Dabei sollen die Höhe des Punktes M und die Reichweite r beibehalten werden.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M' .

Gebiet L 2

**Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie**

Gegeben sind in einem kartesischen Koordinatensystem die Geraden

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 + 4a \\ 4 + 3a \\ 3 + 3a \end{pmatrix}, \quad t, a \in \mathbb{R}.$$

a) Stellen Sie für die Geraden $g_{\frac{4}{3}}$ und g_{-1} jeweils eine Gleichung auf und beschreiben Sie die gegenseitige Lage dieser beiden Geraden.

b) Der Punkt $P(4 | 5 | 3)$ werde durch senkrechte Parallelprojektion in jede der Ebenen des Koordinatensystems projiziert. Hierbei sei P' das Bild des Punktes P in der yz -Ebene und P'' das Bild in der xz -Ebene. Geben Sie die Koordinaten der Punkte von P' und P'' an.

Die Punkte P, P' und P'' bestimmen eine Ebene E_1 . Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung dieser Ebene.

c) Zeigen Sie, dass die Geraden $g_{\frac{4}{3}}$ und g_{-1} senkrecht aufeinander stehen.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der von diesen beiden Geraden aufgespannten Ebene E_2 und zeigen Sie, dass alle Geraden g_a in dieser Ebene liegen. Die Ebene E_2 schneidet die Ebene E_1 (aus Aufgabe b)). Ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgeraden beider Ebenen und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels beider Ebenen.

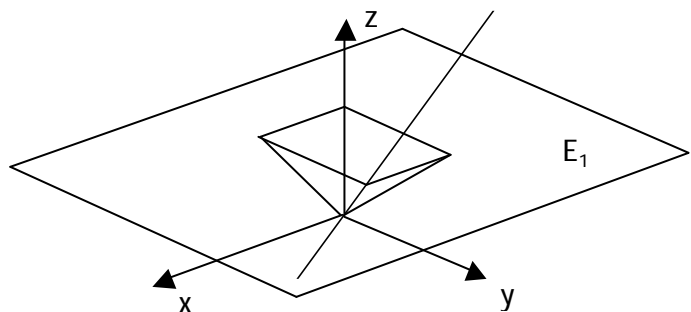
d) Zeigen Sie, dass jede Gerade mit einer Gleichung der Form $\vec{x} = \vec{x}_0 + r \cdot \vec{v}$ beschrieben werden kann durch eine Gleichung der Form $\vec{v} \times (\vec{x} - \vec{x}_0) = \vec{0}$.

Durch die Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ 2,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-3 \end{pmatrix} = \vec{0}$ wird eine der Geraden g_a beschrieben.

Ermitteln Sie den Wert des Parameters a dieser Geraden.

Auf dieser Geraden liegt der Ursprung des Koordinatensystems.

Durch diese Gerade wird eine Ebene senkrecht zur yz -Ebene des Koordinatensystems gelegt. Diese Ebene begrenzt zusammen mit den Ebenen E_1 und E_2 sowie zwei der Koordinatenebenen eine Pyramide vollständig.



(Skizze nicht maßstäblich)

Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens dieser Pyramide.

Gebiet L 3**Aufgabe 3.1**
Wahrscheinlichkeitsrechnung

In der Zuckerfabrik "Oststern" wird Kristallzucker in handelsüblichen Fertigpackungen zu je 1000 g abgefüllt. In den Handel sollen nur solche Fertigpackungen gelangen, die um höchstens 15 g vom Sollwert 1000 g nach unten abweichen (Minusuntergrenze).

- a) Der Großhandel nimmt Paletten mit 500 Fertigpackungen ab. Nach den Angaben der Fabrik ist mit zwei Prozent Fertigpackungen zu rechnen, deren Masse unterhalb der Minusuntergrenze liegt.
Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Packungen auf einer Palette, deren Masse unterhalb der Minusuntergrenze liegt.

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angenommen werden kann und berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung.

Berechnen Sie unter Annahme der Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit mit der mehr als drei, höchstens aber elf Packungen auf der Palette nicht korrekt abgefüllt wurden.

Die Packungen werden auf einer Abfüllanlage gefüllt. Die abgefüllte Masse pro Packung (in Gramm) kann als normalverteilte Zufallsgröße M mit dem Erwartungswert 1000 betrachtet werden.

Bei einer Kontrolle durch die Aufsichtsbehörde dürfen höchstens zwei Prozent der untersuchten Fertigpackungen eine Masse unter der zulässigen Minusuntergrenze haben.

- b) Berechnen Sie, welche Standardabweichung die Zufallsgröße M höchstens haben darf, um diese Forderung zu erfüllen.
- c) Die Aufsichtsbehörde überprüft die Einhaltung der Vorschriften durch die Entnahme einer Stichprobe von 50 Fertigpackungen. Dabei wird bei drei Packungen festgestellt, dass sie die Minusuntergrenze unterschreiten.

Führen Sie einen Signifikanztest mit der Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% durch, mit dem die Einhaltung der Vorschriften überprüft werden kann und bewerten Sie das Testergebnis.

Ermitteln Sie den Fehler 1. Art und einen möglichen Fehler 2. Art.
Interpretieren Sie die Fehler aus der Sicht der Zuckerfabrik.

Gebiet L 3**Aufgabe 3.2
Analysis**

Gegeben sind die Funktionen f_a durch

$$y = f_a(x) = x^2 e^{ax}, \quad a, x \in \mathbb{R}, a \neq 0.$$

Ihre Graphen seien mit G_a bezeichnet.

Jeder Graph G_a besitzt genau zwei lokale Extrempunkte und genau zwei Wendepunkte.

- a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die n -te Ableitung der Funktionen f_a gilt:

$$f_a^{(n)}(x) = e^{ax} (a^n x^2 + 2na^{n-1} x + n(n-1)a^{n-2}), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1.$$

- b) Zeigen Sie, dass jeder lokale Extrempunkt mit $x \neq 0$ ein Hochpunkt ist.
- c) Weisen Sie nach, dass das Verhältnis der Ordinaten der beiden Wendepunkte jedes Graphen G_a unabhängig vom Wert des Parameters a ist.
- d) Ermitteln Sie $\int f_a(x) dx$.

Gebiet L 3**Aufgabe 3.3
Analytische Geometrie**

In einem kartesischen Koordinatensystem sei eine Parabel durch ihre Gleichung $y^2 = 20(x + 5)$ gegeben.

- Ermitteln Sie die Gleichung der Leitgeraden der Parabel.
- Konstruieren Sie mindestens neun Parabelpunkte und skizzieren Sie die Parabel.
- Im Punkt $T(0 | y_T > 0)$ der Parabel werde die Tangente an die Parabel gelegt. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente und berechnen Sie die Koordinaten ihres Schnittpunktes mit der Leitgeraden der Parabel.

[Teilergebnis zur Kontrolle: $y = x + 10$]

Eine Gerade gleichen Anstieges wie die Tangente verlaufe durch den Punkt $A(-2 | 3)$. Diese Gerade schneidet die Parabel in den Punkten S_1 und S_2 . Die Strecke, welche die Punkte S_1 und S_2 miteinander verbindet, ist eine Sehne der Parabel.

Berechnen Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Mittelpunktes dieser Strecke.

Zeigen Sie, dass die Verbindungsgerade durch die Mittelpunkte der zur Sehne $\overline{S_1 S_2}$ parallelen Sehnen dieser Parabel parallel zur Abszissenachse des Koordinatensystems verläuft.