KULTUSMINISTERIUM DES LANDES SACHSEN-ANHALT

Abitur
April/Mai 2002

Mathematik
(Grundkurs)

Arbeitszeit: 210 Minuten

Der Prüfling wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten G 1, G 2 und G 3 zur Bearbeitung aus.

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

Gebiet G 1	Gebiet G 2	Gebiet G 3
Aufgabe 1.1 ☐	Aufgabe 2.1 ☐	Aufgabe 3.1 ☐
Aufgabe 1.2 ☐	Aufgabe 2.2 ☐	Aufgabe 3.2 ☐

Unterschrift Prüfling

Gebiet G 1 **Aufgabe 1.1**
Analysis

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit einer Funktionsgleichung der Form

$$y = f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d, \qquad a, b, c, d, x \in R,$$

schneidet die x-Achse im Punkt $S_x(2 \mid 0)$ sowie die y-Achse im Punkt $S_y(0 \mid 1)$ und berührt die x-Achse im Punkt $B_x(-1 \mid 0)$.

a) Ermitteln Sie die Werte der Parameter a, b, c, d und geben Sie eine Gleichung der Funktion f an.

[Ergebnis zur Kontrolle: $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x + 1$]

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f, ermitteln Sie deren Art und berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes.

Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f symmetrisch zum Punkt S_y ist.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-2{,}5 \le x \le 2{,}5$.

c) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen im I. Quadranten eine Fläche vollständig. Der Flächeninhalt habe die Maßzahl A.
Berechnen Sie diese Maßzahl.

Jede Gerade g mit der Gleichung $y = mx + 1$, $m \in R$, $m < 0$, begrenzt mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig. Der Flächeninhalt habe die Maßzahl A_1.
Ermitteln Sie diese Maßzahl in Abhängigkeit von m.

Berechnen Sie einen Wert für m, wenn für das Verhältnis der Maßzahlen $A : A_1 = 4 : 1$ gilt.

d) Die Parallele zur y-Achse durch den Punkt $P(u \mid f(u))$, $u \in R$, $0 < u < 2$, des Graphen der Funktion f schneidet die x-Achse im Punkt Q. Die Punkte O, P, Q sind Eckpunkte eines Dreieckes.
Ermitteln Sie eine Gleichung zur Berechnung der Maßzahl des Flächeninhaltes dieses Dreieckes in Abhängigkeit vom Parameter u.

(Anmerkung: Diese Gleichung kann als eine Gleichung der Zielfunktion zur Ermittlung des maximalen Flächeninhaltes des beschriebenen Dreiecks angesehen werden.)

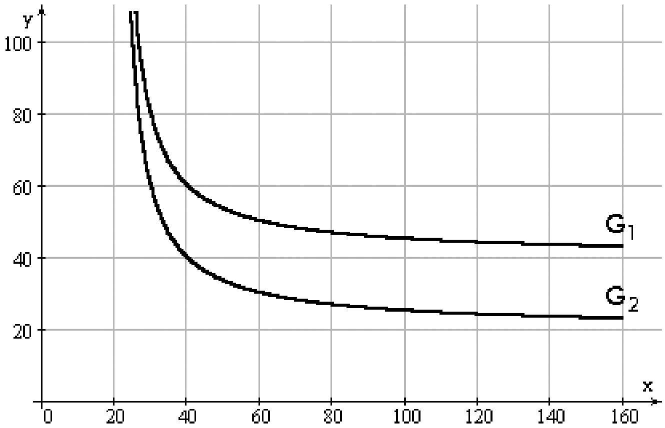
Gegeben ist die Funktion f durch

$$y = f(x) = \frac{20\,x}{x-20}, \qquad x \in \mathbb{R},\ x > 20.$$

a) Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen, auf Polstellen, auf das Monotonieverhalten und das Verhalten für $x \to \infty$.

Weisen Sie nach, dass der Graph der Funktion f weder lokale Extrempunke noch Wendepunkte besitzt.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f bei Annäherung an die Stelle x = 20.



Die nebenstehende Zeichnung zeigt im Intervall $20 < x \leq 160$ die Graphen G_1 und G_2 zweier Funktionen, von denen nachfolgende drei Funktionsgleichungen gegeben sind:

(I) $y = f(x) = \dfrac{20\,x}{x-20}$ (II) $y = 20 + \dfrac{400}{x-20}$ (III) $y = 40 + \dfrac{400}{x-20}$.

Ordnen Sie den Graphen diese Funktionsgleichungen zu.

b) Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes der Fläche, den der Graph der Funktion f, die x-Achse und die Geraden mit den Gleichungen x = 40 und x = 100 vollständig begrenzen.

Die Graphen G_1 und G_2 und die Geraden mit den Gleichungen x = 40 bzw. x = a, $a \in \mathbb{R}$, a > 40, begrenzen eine Fläche vollständig.
Zeigen Sie, dass der Inhalt dieser Fläche durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann.

c) Die Funktion f beschreibt in der Strahlenoptik die Bildweite y (in mm) in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite x (in mm) bei der Abbildung durch eine dünne Konvexlinse mit der Brennweite 20 mm.
Geben Sie die Gegenstandsweite x für den Fall an, dass bei der Abbildung kein Bild entsteht und geben Sie die Bildweite y für den Fall an, dass der Gegenstand ins Unendliche rückt.

Berechnen Sie die Gegenstandsweite x für den Fall, dass sie $\frac{1}{4}$ der Bildweite y beträgt.

Gebiet G 2 **Aufgabe 2.1**
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

sowie der Punkt A(1 | 2 | 3) gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ rechtwinklig zueinander liegen.

Ermitteln Sie die Koordinaten der Punkte B und D, für die gilt:
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \vec{a}$ bzw. $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \vec{b}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes C, so dass ein Rechteck ABCD entsteht.

b) Berechnen Sie das Gradmaß des Winkels, unter dem die Rechteckseite $\overline{AB}$ (siehe Aufgabe a)) zur xy-Ebene verläuft.

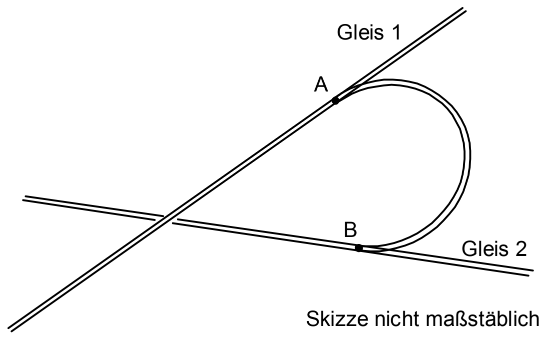
Prüfen Sie, ob die Strecke $\overline{AB}$ die xy-Ebene durchstößt.

c) Durch Rotation des Rechteckes ABCD (siehe Aufgabe a)) um die Symmetrieachse, die senkrecht zur Seite $\overline{AB}$ verläuft, entsteht ein gerader Kreiszylinder.
Berechnen Sie von diesem Zylinder die Maßzahl der Körperhöhe sowie von der Grund- und Deckfläche die Koordinaten der Mittelpunkte und die Maßzahl des Radius.

Bei dieser Rotation gibt es eine parallele Lage des Rechteckes zur yz-Ebene.
Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der dann das Rechteck liegt.

Gebiet G 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie



Skizze nicht maßstäblich

Zwei geradlinige, einander kreuzende Gleise sollen zwischen den Punkten A und B durch ein kreisförmig verlaufendes Gleis verbunden werden (siehe Skizze).
Die zu betrachtende Problematik wird in einem kartesischen Koordinatensystem der Ebene mit dem Ursprungspunkt O beschrieben. Eine Einheit entspricht 10 m.
Die Lage der Gleise wird durch jeweils einen Teilbereich der Geraden g_1 und g_2 bzw. einen Bogen des Kreises k charakterisiert. (Die Geraden g_1 und g_2 müssen Tangenten des Kreises k sein.)

Gegeben sind

g_1: $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, g_2: $\vec{x} = s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $t, s \in R$,

A(8 | 6), B(8 | -6).

a) Berechnen Sie das Gradmaß des kleineren Winkels, unter dem die beiden Gleise einander kreuzen, und zeigen Sie, dass dieser Winkel und der Winkel $\angle AOB$ kongruent sind.

b) Ermitteln Sie eine parameterfreie Gleichung der Geraden g_1 in Normalform und eine Gleichung der zu dieser Geraden senkrechten Geraden $\overline{g}_1$ durch den Punkt A.

Begründen Sie, dass die Mittelpunkte von Kreisen, für die die Geraden g_1 und g_2 Tangenten sind, auf der x-Achse liegen.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k und die Länge des Kurvenradius des Verbindungsgleises.

In den Schnittpunkten der Geraden $\overline{g}_1$ mit dem Kreis k sollen Signalgeber installiert werden.
Geben Sie eine Gleichung des Kreises k an und ermitteln Sie die Koordinaten dieser Schnittpunkte.

Gebiet G 3 **Aufgabe 3.1**
Stochastik

Mit dem Namen „Einarmiger Bandit“ bezeichnet man Spielautomaten, bei denen z. B. drei Walzen mit verschiedenen Symbolen drehbar angeordnet sind. Nach einem Geldeinsatz durch den Spieler werden z. B. durch Betätigen eines Hebels („Einarm“) die Walzen in Rotation gebracht. Nach einem Stopp-Signal kommen die drei Walzen nacheinander zufällig und unabhängig voneinander zur Ruhe. Je nach Anordnung der drei Symbole an einer festen Markierung wird der Gewinn ermittelt.

In einem Spielautomaten vom Typ „Fruit Machine“ sind auf jeder der drei Walzen die Symbole *Zitrone*, *Banane*, *Erdbeere*, *Orange*, *Apfel* und *Traube* angeordnet. Der Auszahlungsplan ergibt sich aus folgenden möglichen Anordnungen der drei Symbole:

A:	Drei Symbole *Erdbeere*:	5 €;
B:	Drei gleiche Symbole (außer *Erdbeere*):	3 €;
C:	Nur gleiche Symbole links außen und rechts außen:	1 €;
D:	Genau zwei gleiche Symbole direkt nebeneinander:	0,50 €.

a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der Ereignisse A, B, C und D.

b) Die Zufallsgröße X bezeichne den Gewinn bei einem Spiel, bei dem der Einsatz 1 € beträgt.
Stellen Sie eine Tabelle der Wahrscheinlichkeitsverteilung für diese Zufallsgröße auf und berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn eines Spiels.

c) Ein Spieler möchte an dem Spielautomaten zehn Spiele durchführen, die als voneinander unabhängig angenommen werden können.
Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit es zu mindestens einem Spiel mit einer Auszahlung kommt.

Gebiet G 3

Aufgabe 3.2
Stochastik

Ein Unternehmen produziert Fahrradcomputer (FaCo) und liefert diese in sehr großer Stückzahl an eine Handelskette für Fahrradzubehör. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein FaCo defekt ist, beträgt 5 %.

Die Zufallsgröße, die die Anzahl der defekten FaCo angibt, wird als binomialverteilt angenommen.

a) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Großpackung von 12 FaCo höchstens zwei defekt sind.

Berechnen Sie, welchen Umfang eine Stichprobe mindestens haben muss, wenn diese Stichprobe mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % mindestens einen defekten FaCo enthalten soll.

Die Handelskette vereinbart mit dem Unternehmen folgende Prüfbedingungen:

- Aus jeder Lieferung werden zunächst 50 FaCo geprüft.
  Eine Lieferung wird angenommen, wenn höchstens zwei FaCo defekt sind.
- Sind genau drei FaCo defekt, werden zusätzlich weitere 20 FaCo geprüft.

b) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Lieferung nach Prüfung von 50 FaCo angenommen wird.

Ermitteln Sie, wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass weitere 20 FaCo geprüft werden müssen.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein FaCo funktioniert, sei nun p, die Wahrscheinlichkeit, dass er defekt ist, $1 - p$.

Betrachtet wird das Ereignis E: Von drei FaCo funktionieren mindestens zwei.

c) Weisen Sie nach, dass für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E gilt:
$P(E) = -2\,p^3 + 3\,p^2$.