SACHSEN-ANHALT

Kultusministerium

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2005

Mathematik
(Grundkurs)

Arbeitszeit: 210 Minuten

Der Prüfling wählt je eine Aufgabe aus den Gebieten G 1, G 2 und G 3 zur Bearbeitung aus.

Gewählte Aufgaben (Die drei zur Bewertung vorgesehenen Aufgaben sind vom Prüfling anzukreuzen.):

Gebiet G 1	Gebiet G 2	Gebiet G 3
Aufgabe 1.1 ☐	Aufgabe 2.1 ☐	Aufgabe 3.1 ☐
Aufgabe 1.2 ☐	Aufgabe 2.2 ☐	Aufgabe 3.2 ☐

Unterschrift Prüfling:

Gebiet G 1

Aufgabe 1.1
Analysis

Der Graph einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit einer Funktionsgleichung der Form

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \qquad a, b, c, d, x \in R,$$

berührt die x-Achse an der Stelle $x = 0$ und hat im Punkt $P(6 \mid 0)$ den Anstieg 9.

a) Ermitteln Sie die Werte für die Parameter a, b, c, d und geben Sie eine Gleichung dieser Funktion f an.

[Ergebnis zur Kontrolle: $y = f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2$]

b) Ermitteln Sie Art und Lage der lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion f .

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ sowie die Monotonie der Funktion f für $x > 4$ und $x < 0$.

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Intervall $-2 \le x \le 7$.

c) An den Graphen der Funktion f wird im Punkt $Q(2 \mid -4)$ die Tangente gelegt.
Stellen Sie eine Gleichung dieser Tangente auf.

Zeigen Sie, dass keine weitere Tangente am Graphen der Funktion f existiert, die denselben Anstieg wie die Tangente im Punkt Q hat.

Der Graph der Funktion f und der Graph der Funktion g mit der Gleichung

$$y = g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 6, \qquad x \in R,$$

begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Gebiet G 1 **Aufgabe 1.2**
Analysis

Gegeben sind die Funktion f und die Gerade g durch

$$f:\quad y = f(x) = x - 1 - \frac{3}{x+1}, \qquad x \in R,\ x \neq -1,$$

und $$g:\quad y = x - 4, \qquad x \in R.$$

a) Ermitteln Sie die Nullstellen und die Polstelle der Funktion f.

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f für $x \to \pm\infty$.

Weisen Sie nach, dass die Funktion f für $x < -1$ und $x > -1$ jeweils streng monoton steigt.

Zur Geraden g existiert genau eine parallele Gerade h, die den Graphen der Funktion f nicht schneidet.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden h.

[Ergebnis zur Kontrolle: $y = x - 1$]

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f und die Gerade h in ein und dasselbe Koordinatensystem im Intervall $-6 \le x \le 6$.

Jede Gerade mit der Gleichung $x = a$, $a > 0$, schneidet die Gerade h in einem Punkt P_a und den Graphen der Funktion f in einem Punkt Q_a.
Ermitteln Sie alle Werte für a, so dass die Maßzahl der Länge der Strecke $\overline{P_aQ_a}$ kleiner als $\frac{1}{1000}$ ist.

b) Die Tangente im Punkt $R(-2 \mid 0)$ an den Graphen der Funktion f sei mit t_1 bezeichnet.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Tangente t_1.

Es existiert genau eine weitere Tangente t_2 an den Graphen der Funktion f, die zur Tangente t_1 parallel verläuft.
Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes der Tangente t_2 mit dem Graphen der Funktion f.

c) Der Graph der Funktion f und die Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieser Fläche.

Gebiet G 2

Aufgabe 2.1
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Gerade g_1 $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in R,$

die Gerade g_2 $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in R,$

sowie die Punkte A(8 | 3 | 6), B(12 | 11 | 10) und S(9 | 8 | 7)
gegeben.

a) Weisen Sie nach, dass die Geraden g_1 und g_2 einander schneiden.

Zeigen Sie, dass der Punkt S der Schnittpunkt der Geraden ist und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels.

b) Die Geraden g_1 und g_2 bestimmen eine Ebene E_1.
Stellen Sie eine Parametergleichung dieser Ebene auf.

Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{AS}$ nicht senkrecht auf der Ebene E_1 steht und berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Strecke $\overline{AS}$.

c) Die Punkte A und B bestimmen eine Gerade g_3. Diese Gerade verläuft parallel zur Ebene E_1 und liegt nicht in der Ebene E_1.
Parallel zur Ebene E_1 liege eine Ebene E_2. Sie habe von der Ebene E_1 und von der Geraden g_3 den gleichen Abstand.
Ermitteln Sie je eine Parametergleichung der Geraden g_3 und der Ebene E_2.

Gebiet G 2

Aufgabe 2.2
Analytische Geometrie

In einem kartesischen Koordinatensystem sind

die Punkte A(2 | 1 | 2), B(5 | 2 | 1), C(6 | 5 | 3), D(0 | 3 | 5)

und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad t \in R,$

gegeben.

a) Die Punkte A, B und C bestimmen die Ebene E.
Geben Sie eine Gleichung der Ebene E an und zeigen Sie, dass der Punkt D in der Ebene E liegt.

Weisen Sie nach, dass das Viereck ABCD ein Trapez ist.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Ebene E (aus Aufgabe a) senkrecht durchstößt und berechnen Sie die Koordinaten des Durchstoßpunktes.

Auf der Geraden g liegen die Punkte P(25 | –26 | 33) und Q(–5 | 16 | –15).
Berechnen Sie das Verhältnis der Maßzahlen der Volumina der Pyramiden ABCDP und ABCDQ.

Gebiet G 3 **Aufgabe 3.1**
Stochastik

In drei Urnen U_1, U_2 und U_3 befinden sich jeweils genau 80 Kugeln:

Urne U_1: 40 rote, 20 grüne und 20 weiße Kugeln
Urne U_2: 50 rote und 30 grüne Kugeln
Urne U_3: 60 rote und 20 grüne Kugeln.

In einer Ziehung wird jeder Urne genau eine Kugel entnommen und die aufgetretene Farbkombination festgestellt. Danach werden die Kugeln in die entsprechenden Urnen zurückgelegt.
Es interessieren die Ereignisse:

A: In einer Ziehung sind alle Kugeln grün.
B: In einer Ziehung haben alle drei Kugeln verschiedene Farben.
C: In einer Ziehung sind genau zwei Kugeln grün.

a) Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A, B und C.

Die beschriebene Ziehung wird folgendermaßen als Spiel genutzt:
- Der Einsatz beträgt 0,50 € pro Spiel.
- Der Auszahlungsplan ist in folgender Tabelle dargestellt:

Ziehungsergebnis	Auszahlungsbetrag
Ereignis A	5,00 €
Ereignis B	1,00 €
Ereignis C	0,50 €

b) Untersuchen Sie, ob bei einer sehr großen Anzahl solcher Spiele ein Spieler Gewinn erwarten kann.

c) Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der Auszahlungen zu je 1,00 € in 1000 Spielen; es gelte $X \sim B_{1000;\,0,11}$.

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Zufallsgröße X.

Berechnen Sie näherungsweise mithilfe der Standardnormalverteilung, mit welcher Anzahl Auszahlungen zu je 1,00 € bei 1000 Spielen mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 75 % mindestens kalkuliert werden kann.

Gebiet G 3 **Aufgabe 3.2**
Stochastik

Der Schülerrat eines Gymnasiums verkauft in einer Sonderaktion Schülerzeitungen. In 20 % der Zeitungen befindet sich eine Eintrittskarte für die Schuldisco.
Der Schülerrat weiß aus Erfahrung, dass bei derartigen Sonderaktionen Schüler der Sekundarstufe II mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 % eine Schülerzeitung kaufen. Es wurden 200 Zeitungen für die Sekundarstufe II bereitgestellt.
Die Zufallsgröße Z beschreibe die Anzahl der davon verkauften Schülerzeitungen; Z werde als binomialverteilt angenommen.

a) Geben Sie jeweils eine Wortformulierung für die Wahrscheinlichkeiten
$P(Z = 160)$ und
$P(Z \geq 160)$
an und ermitteln Sie diese Wahrscheinlichkeiten.

b) Berechnen Sie für 12 Schülerzeitungen jeweils die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:

A: In den 12 Schülerzeitungen sind insgesamt 2 Eintrittskarten enthalten.
B: Die elfte und die zwölfte Schülerzeitung enthalten je eine Eintrittskarte.
C: Nur die ersten beiden Schülerzeitungen enthalten je eine Eintrittskarte.

c) Ermitteln Sie, wie viele Schülerzeitungen ein Schüler mindestens kaufen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Schülerzeitung mit Eintrittskarte erhält.