SACHSEN-ANHALT

Kultusministerium

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2010

Mathematik
(Leistungskursniveau)

Arbeitszeit: 300 Minuten

Es sind die drei Pflichtaufgaben und eine Wahlpflichtaufgabe zu lösen.
Der Prüfling entscheidet sich für eine Wahlpflichtaufgabe.

Die zur Bewertung vorgesehene Wahlpflichtaufgabe ist vom Prüfling anzukreuzen.

☐ Wahlpflichtaufgabe 4.1

☐ Wahlpflichtaufgabe 4.2

Unterschrift

Pflichtaufgaben **Aufgabe 1**
Analysis

Gegeben sind die Funktionen f_b durch

$$y = f_b(x) = \frac{5}{x} - 5bx \quad \text{mit} \quad x \in R,\ x \neq 0,\ b \in R,\ b > 0.$$

Ihre Graphen seien G_b.

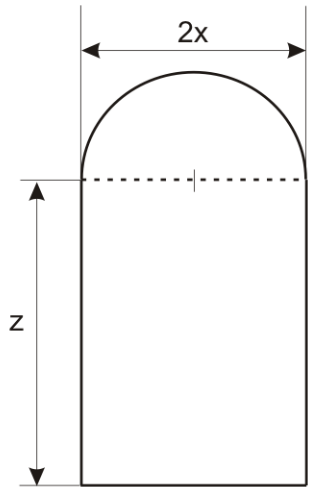
a) Untersuchen Sie die Funktionen f_b auf Nullstellen, Polstellen sowie auf das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und geben Sie Gleichungen der Asymptoten der Graphen G_b an.

Weisen Sie die folgenden Eigenschaften nach:
(1) Die Funktionen f_b sind monoton fallend.
(2) Die Graphen G_b sind punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.

Zeichnen Sie den Graphen G_b für $b = \frac{1}{5}$ im Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

b) Der Graph G_b für $b = \frac{1}{5}$, die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ und die x-Achse schließen eine Fläche vollständig ein.
Berechnen Sie die Maßzahl des Inhaltes dieser Fläche.

Eine Firma produziert Garderobenspiegel in Form eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis (vgl. Abbildung). Die Spiegelfläche von 2 m² wird von einem Spiegelrahmen vollständig eingefasst. Die Kosten für die Herstellung eines Spiegelrahmens werden wie folgt kalkuliert:
- kreisförmig gebogener Teil des Rahmens mit dem Radius x (in m): 50 € pro Meter
- übrige Rahmenteile: 25 € pro Meter



c) Weisen Sie nach, dass die Funktion K mit $y = K(x) = 50 \cdot \left(\frac{3}{4}\pi \cdot x + x + \frac{1}{x}\right)$ und $x > 0$ die Kosten y (in €) für einen Spiegelrahmen in Abhängigkeit von x (in m) beschreibt.

Ermitteln Sie die Längen x und z für den Fall, dass die Kosten minimal sind und geben Sie die minimalen Kosten für einen solchen Spiegelrahmen an.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 2**
Analytische Geometrie

In einem ebenen kartesischen Koordinatensystem ist die Punktmenge k mit der Gleichung $x^2 + y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass es sich bei der Punktmenge k um einen Kreis handelt und geben Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M sowie den Radius r dieses Kreises an.

Ermitteln Sie die x-Koordinate eines Punktes $P(x_P < 0 \mid 0)$ so, dass dieser Punkt auf dem Kreis k liegt, und entwickeln Sie eine Gleichung der Tangente an den Kreis k im Punkt P.

Das oben verwendete Koordinatensystem wird zu einem kartesischen Koordinatensystem des Raumes unter Beibehaltung der xy-Ebene erweitert.

b) Begründen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},\ \lambda \in R$, und der Punkt $Q(3 \mid 1 \mid 4)$ eindeutig eine Ebene E bestimmen.

Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E und berechnen Sie das Gradmaß des Schnittwinkels der Ebene E mit der xy-Ebene.

Betrachtet wird nun ein gerader Kreiskegel K mit der Grundfläche, die durch den Kreis k begrenzt wird, und der Spitze S. Der Punkt S sei derjenige Punkt der Ebene E, der durch senkrechte Projektion in die xy-Ebene auf den Punkt M abgebildet wird.

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes S.

Weisen Sie nach, dass der Punkt $T(-4 \mid \frac{25}{4} \mid 1)$ ein Punkt der Mantelfläche des Kreiskegels K ist.

Pflichtaufgaben **Aufgabe 3**
Stochastik

Studien zufolge treten allergische Erkrankungen immer häufiger auf.

a) Heuschnupfen ist die häufigste Allergieform. Davon sind 20 % der Bevölkerung betroffen.
Die Zufallsgröße X beschreibe die Anzahl der von Heuschnupfen betroffenen Personen in einer Stichprobe.

Begründen Sie, dass die Zufallsgröße X als binomialverteilt angesehen werden kann.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse.
A: Von 28 zufällig ausgewählten Personen sind genau 5 von Heuschnupfen betroffen.
B: Von 200 zufällig ausgewählten Personen sind mehr als 30 aber höchstens 50 von Heuschnupfen betroffen.
C: Von 5000 zufällig ausgewählten Personen sind höchstens 950 von Heuschnupfen betroffen.

Berechnen Sie, wie viele Personen mindestens ausgewählt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens 10 % keine von Heuschnupfen betroffene Person unter diesen ausgewählten Personen zu finden.

b) Man vermutet, dass mehr als 80 % der Kinder, deren Eltern beide die gleiche Allergie haben, ebenfalls von dieser Allergie betroffen sind. Zur Beurteilung dieser Vermutung sollen 500 Kinder solcher Eltern untersucht werden.
Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich für einen Signifikanztest, bei dem die Wahrscheinlichkeit der irrtümlichen Ablehnung der Nullhypothese H_0: $p \leq 0{,}80$ höchstens 5 % beträgt und formulieren Sie eine zugehörige Entscheidungsregel.

Von einem Pollentest sind die in der Vierfeldertafel erfassten Wahrscheinlichkeiten bekannt, wobei die Ereignisse D und E wie folgt definiert sind.
D: Eine Person ist auf Pollen allergisch.
E: Der Pollentest zeigt Allergie an.

	D	$\overline{D}$
E	0,199	0,004
$\overline{E}$	0,001	0,796

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P_D(E)$.

Erklären Sie, weshalb $P_D(E)$ größer als $P(D \cap E)$ ist.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.1**
Analysis

Gegeben ist die Funktion f mit $y = f(x) = 4 \cdot (1 - x) \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Der Graph der Funktion f besitzt genau einen Wendepunkt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente an diesen Graphen in seinem Wendepunkt.

b) Aus den Regelmäßigkeiten der Gleichungen der Funktion f und ihrer Ableitungsfunktionen f' und f'' kann man auf eine Gleichung einer Stammfunktion F von f schließen.
Geben Sie eine Vermutung für eine Gleichung von F an und überprüfen Sie diese.

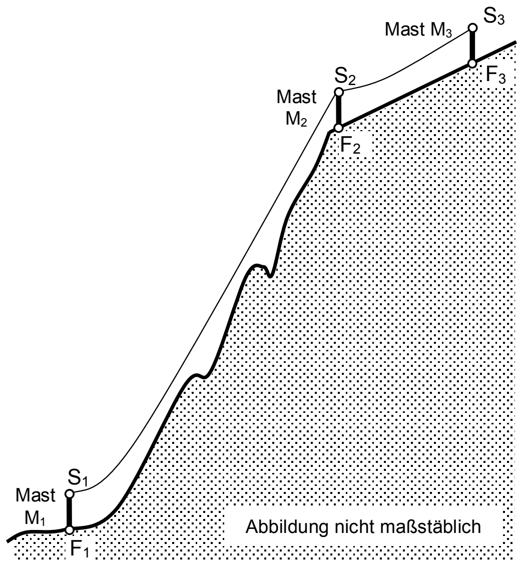
c) Die Funktion f gehört zu den Funktionen f_t mit $y = f_t(x) = (4 - tx) \cdot e^x$ und $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$.
Jeder ihrer Graphen besitzt genau einen Hochpunkt.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ortskurve dieser Hochpunkte.

Zu dieser Ortskurve gehört der Punkt $P(-3 \mid -2e^{-3})$.
Zeigen Sie, dass dieser Punkt auf keinem der Graphen der Funktionen f_t liegt.

Wahlpflichtaufgaben **Aufgabe 4.2**
Analytische Geometrie

Drei gleich hohe Masten M_1, M_2 und M_3 einer geplanten Seilbahn werden als Strecken $\overline{F_1S_1}$, $\overline{F_2S_2}$ bzw. $\overline{F_3S_3}$ betrachtet. Diese Strecken liegen in einer Ebene E und sind paarweise parallel zueinander (siehe Abbildung).
Die Beschreibung der Lage erfolgt in einem kartesischen Koordinatensystem. Eine Einheit entspricht 10 m und die xy-Ebene entspricht der Horizontalebene.

Gegeben sind die Punkte
$F_1(5 \mid 3 \mid 1)$, $S_1(5 \mid 3 \mid 2)$ und $S_2(35 \mid -7 \mid 42)$
sowie die Ebene E mit der Gleichung
$x + 3y - 14 = 0$.



a) Begründen Sie, dass alle Masten senkrecht zur Horizontalebene sind.

Der durchschnittliche Anstieg der Seilbahn zwischen den Masten M_1 und M_2 wird durch den Winkel zwischen der Geraden S_1S_2 und der xy-Ebene beschrieben.
Berechnen Sie das Gradmaß dieses Winkels.

b) Die Masten M_2 und M_3 sollen auf ebenem Gelände errichtet werden, dessen Lage durch die Ebene H mit der Gleichung $x - 3y - 4z + 108 = 0$ beschrieben wird.
Geben Sie die Koordinaten des Punktes F_2 an und ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden F_2F_3.

Die Punkte F_2 und F_3 der Masten M_2 und M_3 sollen einen Abstand von 140 m haben.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes F_3.