

Vom Begründen zum Beweisen - Standpunkte und Linienführung im Lehrplan Mathematik -

1 Forderungen der Bildungsstandards und des Lehrplans

Die Bildungsstandards¹ beinhalten die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „*mathematisch argumentieren*“ (Kompetenz K 1) und „*Kommunizieren*“ (Kompetenz K 6). Sie sind dort näher, auch differenziert nach Anforderungsbereichen, beschrieben.

Im Kompetenzmodell für den Mathematikunterricht in Sachsen-Anhalt wurden diese beiden allgemeinen mathematischen Kompetenzen aufgrund der engen inhaltlichen Verbindungen zu einer zusammengefasst. Mehr noch: Die allgemeine mathematische Kompetenz „*mathematisch argumentieren und kommunizieren*“ wurde in sechs Teilkompetenzen (A1 bis A6) detailliert und ihre Entwicklung entlang der Schuljahrgänge 5/6, 7/8 und 9/10 konkret mit inhaltlichen Bezügen untersetzt (siehe Lehrplan², Seite 7, 11, 14).

Mathematisch argumentieren und kommunizieren



Begriffe, Sätze und Verfahren erläutern	A1
Logische Bestandteile der Sprache sachgerecht gebrauchen	A2
Lösungswege begründen	A3
Aussagen umgangssprachlich oder beispielgebunden begründen und unter Verwendung der mathematischen Fachsprache argumentieren	A4
Wahrheit von Existenzaussagen, Allaussagen und „Wenn ..., so ...“ - Aussagen (über schulmathematisch relevante Sachverhalte) nachweisen	A5
Aussagen zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen	A6

¹ Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Bildungsabschluss. Beschluss der KMK vom 4.12.2003, Luchterhand 2004

² Lehrplan Sekundarschule, Mathematik, Erprobungsfassung 03.08.2009
http://www2.bildung-lsa.de/pool/RRL_Lehrplaene/Erprobung/lpskmathee.pdf



Mathematisch argumentieren und kommunizieren

Schuljahrgänge 5/6	Schuljahrgänge 7/8	Schuljahrgänge 9/10
A1: Begriffe, Sätze und Verfahren erläutern		
<ul style="list-style-type: none"> - Fachtermini verwenden - Begriffe, Sätze und Verfahren an Beispielen erläutern 	<ul style="list-style-type: none"> - in Sätzen Voraussetzung und Behauptung erkennen - Zusammenhänge zwischen Ober- und Unterbegriff herstellen 	<ul style="list-style-type: none"> - Begriffe, Sätze und Verfahren in Zusammenhängen erläutern
A2: Logische Bestandteile der Sprache sachgerecht gebrauchen		
<ul style="list-style-type: none"> - „es gibt ...“, „für alle ...“ „genau ein ...“, „mindestens ein ...“, „höchstens ein ...“ 	<ul style="list-style-type: none"> - „und“, „oder“ 	<ul style="list-style-type: none"> - bewusstes Verwenden von bestimmtem und unbestimmtem Artikel
A3: Lösungswege begründen.		
<ul style="list-style-type: none"> - Fachbegriffe beim Begründen von Lösungswegen, von Eigenschaften geometrischer Objekte und von Konstruktionen verwenden 	<ul style="list-style-type: none"> - Auswahl eines Lösungsverfahrens begründen - Eindeutigkeit bzw. Mehrdeutigkeit der Lösungen beachten 	<ul style="list-style-type: none"> - Lösungswege komplexer Aufgaben unter Verwendung von Fachbegriffen beschreiben sowie begründen
A4: Aussagen umgangssprachlich oder beispielgebunden begründen und unter Verwendung der mathematischen Fachsprache argumentieren		
<ul style="list-style-type: none"> - Beurteilen von Aussagen durch direkte Bezugnahme auf einen Begriff oder Satz - Routineargumentationen an Beispielen verwenden (z. B. „3 ist Teiler von 441, weil ...“) 	<ul style="list-style-type: none"> - Aussagen mithilfe bekannter Sätze begründen 	<ul style="list-style-type: none"> - Entwickeln komplexer Argumentationen
A5: Wahrheit von Existenzaussagen, Allaussagen und „Wenn ..., so ...“ - Aussagen (über schulmathematisch relevante Sachverhalte) nachweisen		
<ul style="list-style-type: none"> - Wahrheit von Existenzaussagen durch Angabe eines Beispiels begründen - Falschheit von All-Aussagen durch Angabe eines Gegenbeispiels begründen 	<ul style="list-style-type: none"> - Wahrheit einfach strukturierter „Wenn ..., so ...“-Aussagen nachweisen - Umkehrungen von einfach strukturierter „Wenn ..., so ...“-Aussagen bilden und bezüglich der Wahrheit beurteilen 	<ul style="list-style-type: none"> - Nachvollziehen und Beurteilen mehrschrittiger mathematischer Argumentationen
A6: Aussagen zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen		
<ul style="list-style-type: none"> - Vermutungen finden und durch geeignete Vorgehensweisen überprüfen 	<ul style="list-style-type: none"> - Aussagen zu mathematischen Inhalten erläutern 	<ul style="list-style-type: none"> - mathematische Texte erfassen und auswerten

Im Folgenden soll nun die Aufmerksamkeit auf die Kompetenz „A5: *Wahrheit von Existenzaussagen, Allaussagen und „Wenn ..., so ...“ - Aussagen (über schulmathematisch relevante Sachverhalte) nachweisen*“ konzentriert werden.

Dahinter steht die spezifische mathematische Aktivität BEWEISEN.

2 Linienführung im Lehrplan zum BEWEISEN - Aussagen innerhalb der Kompetenzschwerpunkte

Die Darstellung der Kompetenzschwerpunkte im neuen Lehrplan enthält ausschließlich verbindliche Forderungen hinsichtlich der zu entwickelnden Kompetenzen und der dabei zu berücksichtigenden Wissensbestände. Anders als in den bisherigen Rahmenrichtlinien werden keinerlei Hinweise methodischer Art gegeben. Zum Beispiel steht in den bisherigen Rahmenrichtlinien, welche Sätze im Unterricht wie zu behandeln sind, z. B. Sätze über die Summe der Innenwinkel im Dreieck bzw. Viereck (mit Beweis), Entdecken und Formulieren des Satzes des Pythagoras, anschauliches Beweisen des Satzes des Pythagoras u.s.w.

Solche Angaben sind im neuen Lehrplan nicht enthalten. Dies bedeutet jedoch nicht, dass bezüglich der zu entwickelnden Kompetenzen, insbesondere bei der Kompetenz A5, im neuen Lehrplan im Vergleich zu den bisherigen Rahmenrichtlinien abgeschwächte Forderungen gestellt werden. Vielmehr ist es so, dass durch die Darstellung im Lehrplan ganz stark auf tatsächlich zu erreichende Kompetenzen bei den Schülerinnen und Schülern orientiert wird. Unter Berücksichtigung der spezifischen Situation in der Lerngruppe kommt es darauf an, an geeigneten Stellen im Mathematikunterricht etwas Nachhaltiges zur Kompetenzentwicklung hinsichtlich des BEWEISENS beizutragen. Dies kann und sollte auch dafür besonders geeignete Inhalte des Mathematikunterrichts berücksichtigen (z. B. die Innenwinkelsätze). Dabei geht es aber nicht um den Beweis an sich oder gar dessen zusammenhängende Darstellung, sondern um Einsichten und Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler im Zusammenhang mit der spezifisch mathematischen Form des Argumentierens in der Mathematik, nämlich dem BEWEISEN. Nachrangig ist somit, ob der Beweis eines Satzes im Unterricht (vollständig) behandelt wird.

Innerhalb der Kompetenzschwerpunkte gibt es dazu auch ganz explizite Forderungen hinsichtlich zu entwickelnder Teilkompetenzen und von speziellen Wissensbeständen.

Im Folgenden sind diese aus dem Lehrplan herausgefiltert und zusammenhängend dargestellt, so dass diese Linienführung deutlich hervortritt.

Schuljahrgang 5/6

Kompetenzschwerpunkt	Kompetenz, Wissensbestände
ZG ³ : Gleichungen	- wahre und falsche Aussagen
RF: Winkelbeziehungen	- Winkelbeziehungen für das Bestimmen von Winkelgrößen und für Begründungen nutzen - Satz, Voraussetzung, Behauptung
RF: Dreiecke	- Innenwinkelsatz bei Berechnungen und Begründungen anwenden - Dreiecke auf Kongruenz untersuchen - Vermutungen über Eigenschaften von Dreiecken durch induktives Schließen finden - Innenwinkelsatz, Beweisnotwendigkeit bei Sätzen

Realschulabschlussbezogener Unterricht

Kompetenzschwerpunkt	Kompetenz, Wissensbestände
Sjg. 7/8 - RF: Vierecke	- Aussagen über Vierecke durch Zurückführen auf Dreiecke begründen - Innenwinkelsatz bei Berechnungen und Begründungen anwenden - Beweisführung am Beispiel des Satzes über die Summe der Innenwinkel im Viereck
Sjg. 7/8 - RF: Rechtwinklige Dreiecke	- Umkehrung eines Satzes
Sjg. 9/10 - ZG: Arbeiten mit Variablen und Potenzen	- Allaussagen über einfach strukturierte arithmetische Sachverhalte auf Wahrheit und Falschheit untersuchen
Sjg. 9/10 - RF: Ähnlichkeit	- Dreiecke auf Ähnlichkeit untersuchen

Hauptschulabschlussbezogener Unterricht

Kompetenzschwerpunkt	Kompetenz, Wissensbestände
Sjg. 7/8 - RF: Vierecke	- Innenwinkelsatz für Vierecke durch Zurückführen auf Dreiecke begründen und bei Berechnungen anwenden

In dieser Tabelle sind nur die verbindlichen Inhalte bezüglich der allgemeinen mathematischen Kompetenz A5 aufgelistet. Die Entwicklung dieser Kompetenz darf darauf keinesfalls reduziert werden. Sie soll integraler Bestandteil des Mathematikunterrichts sein. So sei darauf hingewiesen, dass in fast jedem Kompetenzschwerpunkt die Kompetenz „inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben lösen“ ausgewiesen ist. Vielfältige Begründungsaufgaben gehören zu den innermathematischen Anwendungsaufgaben. Da sie fast immer eine neue, ungewohnte Anforderungssituation darstellen, sind sie i. d. R dem Anforderungsbereich III zuzuordnen.

³ Die Abkürzungen ZG, RF, ZF und DZ geben die Inhaltsbereiche an: Zahlen und Größen, Raum und Form, Zuordnungen und Funktionen, Daten und Zufall.

3 Mathematikdidaktische Standpunkte und Folgerungen

Aus dem in den Punkten 1 und 2 Dargestellten folgt:

Erstens, dass das Befähigen zum mathematischen Argumentieren im Mathematikunterricht überhaupt vorkommen und zu nachweisbaren Ergebnissen führen soll, auch im Mathematikunterricht der Sekundarschule.

Zweitens geht es offenkundig nicht in erster Linie um das Behandeln von Beweisen ausgewählter Sätze.

Drittens resultiert der Stellenwert des „Argumentierens/Beweisens“ im Mathematikunterricht aus den spezifischen Potenzen der damit verbundenen mathematischen Arbeitsweise hinsichtlich der Persönlichkeitsentwicklung der Schülerinnen und Schüler. Die Forderung nach Kompetenzentwicklung hinsichtlich des „Argumentierens/Beweisens“ ergibt sich also nicht allein und nicht primär aus der Systematik der Wissenschaft Mathematik.

Mit dem „Argumentieren/Beweisen“ werden Fragen der **Erkenntnisgewinnung und Erkenntnissicherung** thematisiert, die im Kern zu jeglichem Gegenstandsbereich menschlicher Erkenntnis gehören. Sie reichen also weit über die Mathematik hinaus. Neben damit verbundenen kognitiven Aspekten (z. B. induktives Schließen, deduktives Schließen, Existenz- und Allaussagen) ist es möglich, die Entwicklung bestimmter Persönlichkeitseigenschaften der Schülerinnen und Schüler zu fördern (z. B. gedankliche Strenge, folgerichtiges Denken, sachbezogenes Argumentieren durch sich Stützen auf wahre Ausgangspunkte, kritische Distanz zum vorschnellen Verallgemeinern).

Eine Kompetenzentwicklung „Argumentieren/Beweisen“ erfordert spezifische Einsichten und Kenntnisse.

- (1) Einsicht in die Notwendigkeit von Beweisen
- (2) Verständnis der Untauglichkeit der unvollständigen Induktion für das Beweisen von Allaussagen
- (3) Einsicht, dass eine Allaussage mit einem Gegenbeispiel als falsch nachgewiesen ist.
- (4) Einsicht, dass mit einem Beispiel eine Existenzaussage als wahr nachgewiesen ist.
- (5) Kenntnis des prinzipiellen Aufbaus mathematischer Beweise als Argumentationskette von der Voraussetzung zur Behauptung mit folgenden Merkmalen:
 - Alle verwendeten Begriffe müssen eindeutig geklärt („definiert“) sein.
 - Man darf sich beim Argumentieren nur auf Definitionen und wahre Aussagen stützen.
 - Alle Schlüsse müssen logisch korrekt sein.

Die Termini „Begründung“ und „Beweis“ werden in der Praxis mehr oder weniger scharf voneinander abgegrenzt.

Am Verbreitetsten ist wohl die Auffassung, dass es beim „Begründen“ keine Konvention hinsichtlich der Darstellung gibt, während beim „Beweisen“ sehr wohl häufig auch das Einhalten gewisser Darstellungskonventionen erwartet wird, z. B.:

Voraussetzung:

Behauptung:

Beweis (bestehend aus Beweisschritten mit jeweiliger Begründung):

Rein logisch müssen zwischen beiden Begriffen keine Unterschiede gesehen werden. Eine Begründung ist eben nur dann stichhaltig, wenn sie sachlich vollständig und korrekt ist (unabhängig von der Darstellung).

Unterschiede ergeben sich allerdings, wenn man die Funktion einer Begründung und ihre Einbindung in den Kontext berücksichtigt. Im Unterrichtsprozess können Begründungen für eine Aussage alle gedanklichen Schritte enthalten und damit in diesem Unterrichtszusammenhang völlig ausreichend sein. Solche Begründungen würde man in einem anderen Zusammenhang möglicherweise mangels sorgfältiger Notation nicht als Beweis bezeichnen oder als solchen nicht akzeptieren, weil sie z. B. hinsichtlich Allgemeinheit spezielle Fälle nicht berücksichtigen, wie etwa beim beispielgebundenen Begründen.

In der Fachwissenschaft Mathematik haben Beweise vor allem die Funktion der Erkenntnissicherung, denn die Mathematik ist eine Wissenschaft, in der nur die „Autorität des Argumentes“ gilt. Beweise legitimieren das deduktive Theoriegebäude. In diesem werden eben nicht nur inhaltliche, sondern auch formale Ansprüche an Beweisdarstellungen gestellt.

Formale Ansprüche an eine Beweisdarstellung sollten im Mathematikunterricht nicht dominieren, sondern sehr behutsam beachtet werden. Im Mittelpunkt steht hier vielmehr der Prozess, wie man auf eine Beweisidee kommt, welche Beweisschritte erforderlich sind usw. Gerade diese prozessuale Seite sollte im Mathematikunterricht im Sinne der Befähigung zum Argumentieren betont werden.

Folgendes Modell soll den vorstehend besprochenen Prozessaspekt veranschaulichen:

