



Institut zur Qualitätsentwicklung
im Bildungswesen

Vergleichsarbeiten 2017

3. Jahrgangsstufe (VERA-3)

Mathematik – Didaktische Handreichung

Modul B

Didaktische Erläuterung

Muster und Strukturen Größen und Messen



Inhaltsverzeichnis

1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik	3
2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards	3
2.1 Die Bildungsstandards Mathematik	3
2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik.....	4
3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche	7
3.1 Der Kompetenzbereich „ <i>Muster und Strukturen</i> “ in den Bildungsstandards	7
3.1.1 Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen	7
3.1.2 Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen	7
3.2 Die Kompetenz „Größen und Messen“ in den Bildungsstandards	8
3.2.1 Größenvorstellungen besitzen.....	8
3.2.2 Mit Größen in Sachsituationen umgehen können.....	9
4. Anregungen für den Unterricht	10
5. Literaturverzeichnis	11

Wussten Sie, dass Sie viele VERA-Aufgaben und Didaktische
Materialien auch online finden können?

www.iqb.hu-berlin.de/vera/aufgaben

1. Allgemeine Erläuterungen zum Fach Mathematik

Im Folgenden werden wesentliche Komponenten der Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich sowie die hierzu empirisch konstruierten Kompetenzstufen kurz dargestellt. Ferner werden die mathematischen Kompetenzbereiche *Muster und Strukturen* und *Größen und Messen* erläutert und an konkreten Aufgabenbeispielen illustriert. Schließlich werden einige allgemeine Überlegungen zu einem Mathematikunterricht skizziert, der gute Voraussetzungen für das Erreichen der durch die Standards vorgegebenen Ziele bietet. Dabei wird auf die beiden Domänen *Muster und Strukturen* und *Größen und Messen* kurz eingegangen. Detailliertere unterrichtliche Anregungen sowie spezifische Übungen sind in den aufgabenspezifischen didaktischen Kommentaren zu finden.

2. Kompetenzorientierung und Bezug zu den Bildungsstandards

2.1 Die Bildungsstandards Mathematik

Die Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich beschreiben die fachbezogenen Kompetenzen, die Schülerinnen und Schüler bis zum Ende der vierten Jahrgangsstufe erworben haben sollen. Kompetenzen sind kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten, die in aktiver Auseinandersetzung mit substantiellen Fachinhalten erworben werden können. Dabei wird zwischen allgemeinen und inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen unterschieden.

Das wesentliche Ziel der Bildungsstandards ist es, die Qualität des Unterrichts zu steigern und dadurch die Leistungen und fachbezogenen Einstellungen aller Schülerinnen und Schüler zu verbessern. Entsprechend sollen die Standards eine Orientierung über verbindliche Zielerwartungen bieten. Verbunden mit den Bildungsstandards in der Primarstufe sind Möglichkeiten zur Überprüfung, inwieweit diese Ziele am Ende der Klassenstufe 4 erreicht worden sind.

Die *allgemeinen mathematischen Kompetenzen* umfassen fachliche Fähigkeiten, die in allen Inhaltsbereichen der Mathematik bedeutsam sind. Im Einzelnen sind dies:

- Technische Grundfertigkeiten,¹
- Problemlösen,
- Kommunizieren,
- Argumentieren,
- Darstellen,
- Modellieren.

¹ In den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich“ der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>) ist die allgemeine mathematische Kompetenz „Technische Grundfertigkeiten“ noch nicht enthalten. Eine inhaltlich ähnlich beschriebene allgemeine mathematische Kompetenz findet sich allerdings bereits bei den Bildungsstandards für den Sekundarbereich („Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“). Mittlerweile wurden im Zuge der Entwicklung von Kompetenzstufenmodellen in Mathematik auch für den Primarbereich die allgemeinen mathematischen Kompetenzen durch die sechste Dimension der „Technischen Grundfertigkeiten“ ergänzt, weil diese Dimension in den anderen allgemeinen mathematischen Kompetenzen nicht hinreichend abgedeckt schien (vgl. Winkelmann/Robitzsch 2009). Ferner hat sich gezeigt, dass diese Dimension vor allem zur differenzierten Beschreibung der Aufgaben im unteren Leistungsbereich hilfreich ist. Die Ergänzung findet sich auf Seite 5 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>.

Die für die Primarstufe beschriebenen inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen beziehen sich auf *fünf mathematische Leitideen*:

- Zahlen und Operationen,
- Raum und Form,
- Muster und Strukturen,
- Größen und Messen,
- Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Diese Leitideen sollen den Schülerinnen und Schülern helfen, zentrale mathematische Konzepte kennenzulernen und zu verstehen sowie den vernetzten Charakter der Mathematik zu erkunden. Zu den Leitideen werden inhaltsbezogene Kompetenzen unterschiedlichen Abstraktionsgrades formuliert (s. Kultusministerkonferenz 2005).

2.2 Kompetenzstufen im Fach Mathematik

Die oben kurz dargestellte Konzeption der Bildungsstandards Mathematik bildet einen theoretischen Rahmen zur Konzeption guten Mathematikunterrichts. Im Sinne der „Output-Orientierung“ ist von Interesse, was Schülerinnen und Schüler verschiedener Altersstufen und verschiedener Bildungsgänge „tatsächlich können“.

Auf der Grundlage empirischer Daten lassen sich sowohl Aufgaben – nach Schwierigkeit –, als auch die Schülerinnen und Schüler – nach Leistungsfähigkeit – verschiedenen „Kompetenzstufen“ zuordnen, was allen für die Unterrichtskonzeption Verantwortlichen hilfreiche Orientierungen geben kann.

Mit Hilfe entsprechender Daten wurde ein Kompetenzstufenmodell erarbeitet, das fünf hierarchisch angeordnete Kompetenzstufen enthält, die bei der Beschreibung von mathematischen Basiskompetenzen beginnen und bis zur Identifizierung eines elaborierten und souveränen Umgangs mit Mathematik in der Primarstufe gehen (vgl. Reiss, Roppelt, Haag, Pant & Köller 2012; Reiss & Winkelmann 2008; 2009). Das Modell umfasst alle in den Bildungsstandards ausgewiesenen mathematischen Leitideen. Es ermöglicht auf breiter Basis die Interpretation der mathematischen Kompetenz von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe.

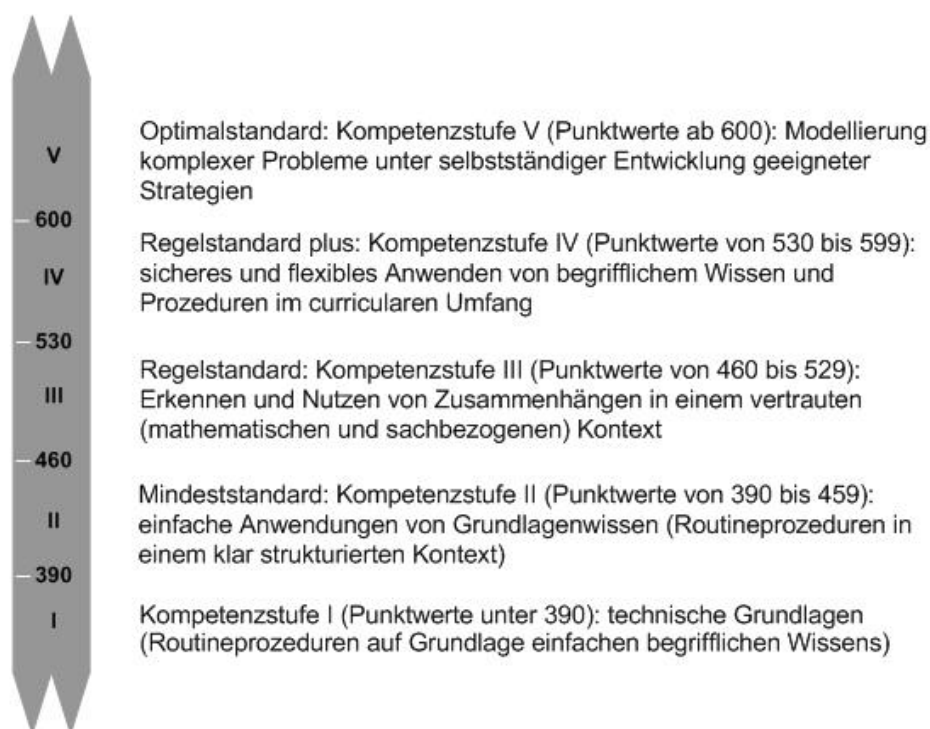


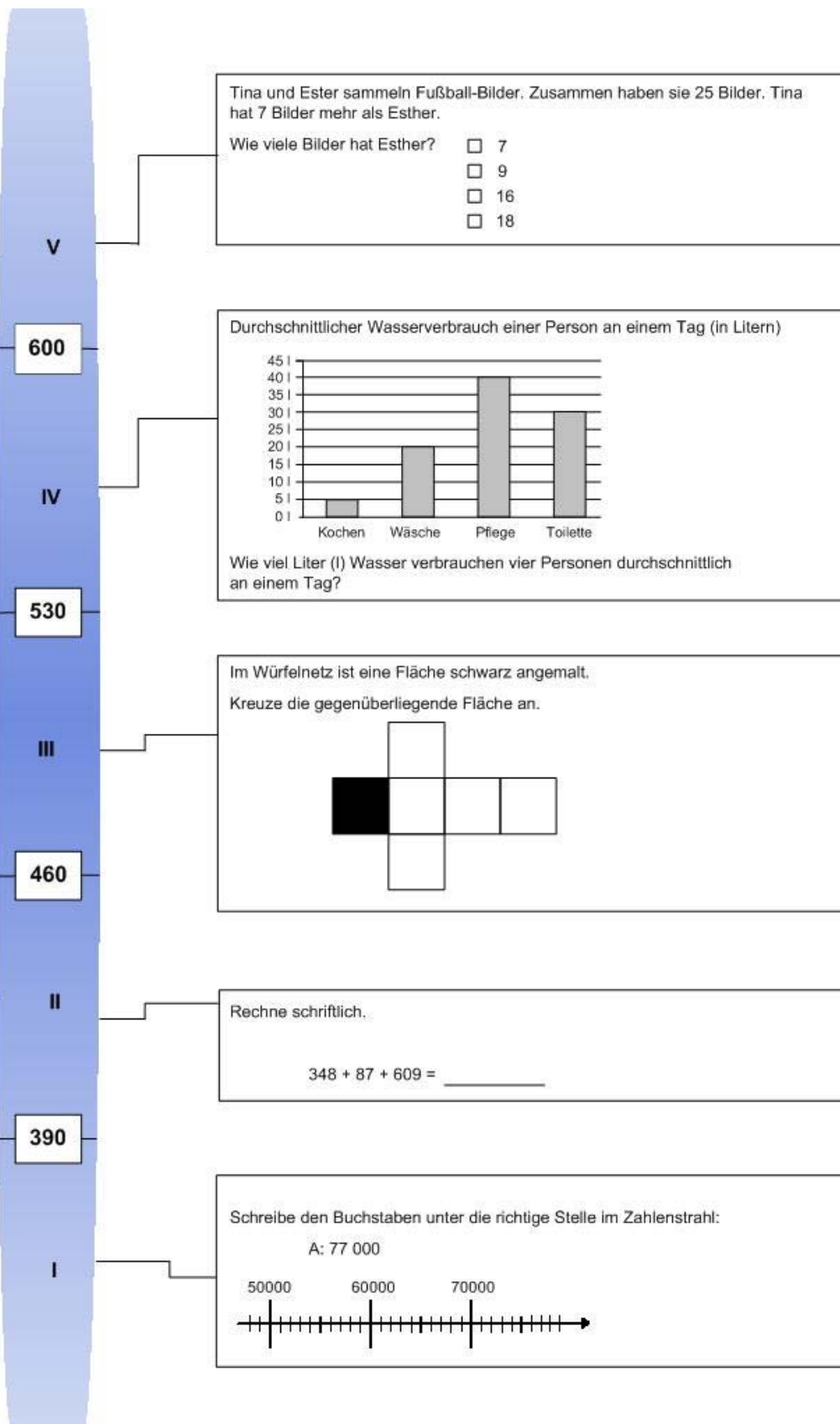
Abbildung 1: Übersicht der Kompetenzstufen aus dem Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik in der Grundschule

Mindeststandard. Als Ausgangswert für die Stufeneinteilungen wurde jeweils das obere Ende von Kompetenzstufe I gewählt, und zwar so, dass alle Aufgaben mit Kennwerten unterhalb dieses Schwellenwerts nur solche Anforderungen stellen, deren einigermaßen sichere Erfüllung von *allen* Schülerinnen und Schülern des jeweiligen Bildungsgangs erwartet werden muss; man spricht hier vom *Mindeststandard* des Bildungsgangs. Schülerinnen und Schüler, die zum Ende der vierten Jahrgangsstufe die Kompetenzstufe II nicht erreichen und somit diesen Mindeststandard von 390 Punkten nicht erfüllen, haben einen besonderen *Förderbedarf*.

Regelstandard. Der *Regelstandard*, den die Schülerinnen und Schüler zum Ende der vierten Jahrgangsstufe zumindest *im Durchschnitt* erfüllen sollen, ist höher angesetzt. Schülerinnen und Schüler, die mindestens 460 Punkte und damit die Kompetenzstufe III oder eine höhere erreicht haben, erfüllen die in den Bildungsstandards beschriebenen Erwartungen und erreichen den von der KMK festgelegten Regelstandard.

Die oberste Stufe des hier vorgestellten Kompetenzmodells ist nach oben offen, d. h. es sind prinzipiell noch schwierigere Items und noch höhere Leistungen möglich, als in der zugrunde liegenden Erhebung vorkamen. Dementsprechend ist die niedrigste Stufe nach unten offen, d. h. es sind noch leichtere Items denkbar, die auch noch von sehr schwachen Schülerinnen und Schülern gelöst werden können.

In der folgenden Abbildung sind Beispielaufgaben unterschiedlicher Schwierigkeit den einzelnen Stufen zugeordnet:



Aus Platzgründen sind die Aufgaben in modifiziertem Layout dargestellt.

Abbildung 2: Globales Kompetenzstufenmodell und illustrierende Aufgaben im Fach Mathematik (siehe Seite 14 des „Kompetenzstufenmodells zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>).

3. Beschreibung der zu testenden Kompetenzbereiche

In den VERA-3 zur Mathematik werden pro Jahr jeweils zwei der fünf *inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche* umlaufend geprüft. In diesem Jahr (2016) werden die Bereiche *Muster und Strukturen* und *Größen und Messen* getestet. Zu beiden Domänen werden im Folgenden einzelne Aspekte der Kompetenzbereiche differenziert dargestellt und anhand von konkreten Aufgaben aus VERA-3 für 2016 näher erläutert. Die Ausführungen stützen sich im Wesentlichen auf die Beschreibungen von Walther et al. (2012).

3.1 Der Kompetenzbereich „Muster und Strukturen“ in den Bildungsstandards

Der Kompetenzbereich *Muster und Strukturen* hat höchste praktische Relevanz und eröffnet somit zahlreiche anwendungsbezogene Übungsfelder. Er zeichnet sich durch Vernetzungen mit allen anderen Kompetenzbereichen aus: Es gibt Verbindungen zu *Zahlen und Operationen*, zu *Raum und Form*, zu *Größen und Messen* und zu *Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*. In der kurzen Darstellung der Bildungsstandards umfasst die Leitidee *Muster und Strukturen* zwei wesentliche zusammenhängende Aspekte mit zahlreichen mathematischen Bezügen:

- Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen
- funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen²

3.1.1 Gesetzmäßigkeiten erkennen, beschreiben und darstellen

Wie die Aufgabe in Abbildung 6 zeigt, umfasst dieser Bereich Aufgaben, die auf den ersten Blick auch dem Bereich *Zahlen und Operationen* zugeordnet werden könnten. Zunächst geht es um das Beschreiben einer Felddarstellung mithilfe einer Multiplikation. Jedoch geht es an dieser Stelle um mehr: Gegeben ist ein geometrisches Muster. Dieses soll erkannt und mit dem arithmetischen Muster in Verbindung gesetzt werden. Eine Seite des Rechtecks bleibt gleich, die andere wächst fortlaufend um eine Kästchenlänge. In der Multiplikation zeigt sich dies durch den gleichbleibenden Faktor 2 und den zweiten Faktor, der fortlaufend um eins größer wird.

Schreibe die passenden Mal-Aufgaben auf. Achte auf das Muster.

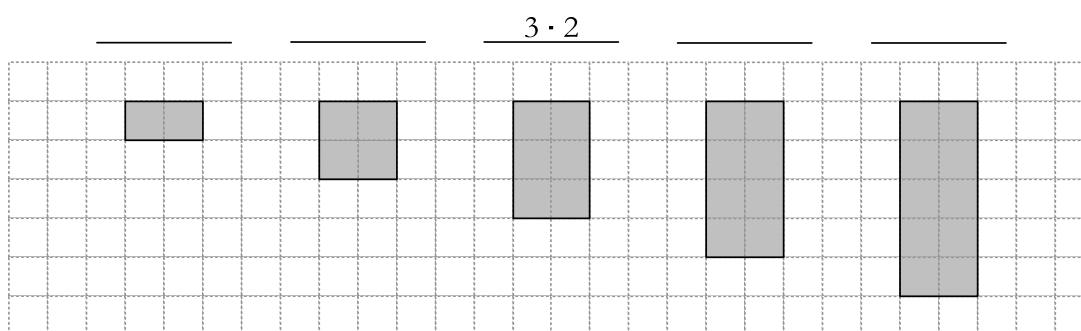


Abbildung 6: Aufgabe 2, VERA-3 Mathematik 2016

3.1.2 Funktionale Beziehungen erkennen, beschreiben und darstellen

Ein weiterer Aspekt im Bereich *Muster und Strukturen* betrifft funktionale Beziehungen. Wird einer Zahl oder einer Größe nach einer festen Vorschrift eine zweite Zahl oder Größe zuge-

² siehe Kultusministerkonferenz 2005, S. 10-11 unter <https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject>.

ordnet, so ergeben sich Zahlenpaare, die oftmals ein Muster erkennen lassen. Ein funktionaler Zusammenhang, der in vielen Sachsituationen beim Modellieren auftritt, ist die Proportionalität. Weniger häufig zeigen sich indirekte Proportionalität, wie in Aufgabe 5 (Abbildung 7): Je mehr Elias an einem Tag strickt, desto schneller wird er fertig.

Elias strickt einen Schal. Er strickt jeden Tag ein gleich langes Stück.
Wenn er jeden Tag 16 cm strickt, ist der Schal in 10 Tagen fertig.

Wie viel müsste er jeden Tag stricken, damit er in 5 Tagen fertig wird?

_____ cm



Abbildung 7: Aufgabe 5, VERA-3 Mathematik 2016

3.2 Die Kompetenz „Größen und Messen“ in den Bildungsstandards

Der inhaltsbezogene Kompetenzbereich Größen und Messen zeichnet sich im Besonderen durch seinen unmittelbaren Bezug zur Lebenswelt aus. Er ist damit unerlässlich für den Aufbau mathematischer Grundbildung und ermöglicht es den Kindern, kritisch und reflektiert mit ihrer Umwelt umzugehen. Neben diesem anwendungsbezogenen Aspekt stellt diese Domäne aber auch ein wichtiges Bindeglied zwischen Arithmetik und Geometrie dar, wobei insbesondere der Unterscheidung zwischen Maßzahlen und Rechenzahlen große Bedeutung zukommt. Explizit sollen folgende Kompetenzen in diesem Bereich aufgebaut werden:

- Größenvorstellungen besitzen
- mit Größen in Sachsituationen umgehen können

3.2.1 Größenvorstellungen besitzen

Tragfähige Vorstellungen von Größen basieren auf der Kenntnis der Standardeinheiten der verschiedenen Größen und deren Repräsentanten. Über Stützpunktvorstellungen (z. B. ein erwachsener Mann ist etwas zwei Meter groß, eine Schulstunde dauert 45 Minuten, ...) können Größen geschätzt werden, indem sie direkt gedanklich verglichen werden oder indem gedanklich mit einem Vergleichsmaß gemessen wird.

Am Beispiel der Aufgabe „Maßeinheiten einsetzen“ (Abbildung 2) werden diese relevanten Aspekte des Kompetenzbereichs „Größenvorstellungen besitzen“ deutlich.

Zur Bearbeitung der Aufgabe müssen die Schülerinnen und Schüler die Standardeinheiten des Bereichs Längen kennen und den jeweiligen Maßeinheiten Repräsentanten zuordnen.

Setze die richtige Maßeinheit ein.

mm

cm

m

km

m

Eine Tür ist ungefähr 2 _____ hoch.

Ein Floh ist ungefähr 3 _____ lang.

Ein Autobus ist ungefähr 14 _____ lang.

Von Hamburg nach München sind es ungefähr 800 _____.

Ein Filzstift ist ungefähr 17 _____ lang.

Abbildung 2: Aufgabe „Maßeinheiten einsetzen“, VERA-3 Mathematik 2013

Für die Grundschule relevante Größenbereiche sind neben Längen die Größenbereiche Geldwerte, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte/Hohlmaße. Es sollen jeweils verschiedene Größen verglichen, gemessen und geschätzt, sowie Größenangaben in unterschiedlichen Schreibweisen dargestellt bzw. umgewandelt werden. Dabei verwenden die Schülerinnen und Schüler auch einfache Bruchzahlen, die im Alltag gebräuchlich sind.

3.2.2 Mit Größen in Sachsituationen umgehen können

Ein zweiter Aspekt im Bereich Größen und Messen umfasst den Umgang mit Größen in Sachsituationen. Dabei soll der Mathematikunterricht die Kinder unterstützen, Fähigkeiten bezüglich des Messens und Schätzens von Größen aufzubauen und zu erweitern, mit Größen zu rechnen, Sachaufgaben mit Größen zu lösen und Messinstrumente entsprechend zu klassifizieren.

Wie die Aufgabe „Fahrplan Schulbus“ (Abbildung 3) zeigt, umfasst die Kompetenz „mit Größen in Sachsituationen umgehen“ nicht nur das Lösen von Sachaufgaben mit Größen, sondern auch den geeigneten Umgang mit Einheiten und Messgeräten.

Fahrplan - Schulbus			
Haltestellen	Abfahrtszeit		
Schulstraße	11.15	12.00	13.20
Kleine Straße	11.31	12.16	13.36
Neudorf	11.45	12.30	13.50
Siedlung	12.02	12.47	14.04
Sportplatz	12.17	13.02	14.22
Gartenallee	12.25	13.10	14.30



Grafik: © IQB

Du bist um 11.50 Uhr an der Haltestelle „Schulstraße“.

Der nächste Bus kommt pünktlich. In wie vielen Minuten fährt er ab?

In _____ Minuten.

Abbildung 3: Aufgabe „Fahrplan Schulbus“, VERA-3 Mathematik 2013

Die Schülerinnen und Schüler verfügen in der Regel bereits über zahlreiche *Erfahrungen in Bezug auf Größen*. Diese sollen beim Lösen von Sachproblemen herangezogen werden. Gegebenenfalls wird mit *Näherungswerten gerechnet* und *Größen* werden *begründet geschätzt*. Die Aufgabe „Weitsprung“ (Abbildung 4) kann beispielhaft für die Anwendung von Bezugsgrößen aus der Erfahrungswelt der Kinder stehen. In diesem Fall müssen die Kinder Größenvorstellungen aus dem Bereich Längen zur Begründung verwenden.

Eric hat aufgeschrieben, wie weit die Kinder beim Sport gesprungen sind.

Welche Aussage kann nicht stimmen? Kreuze an.

- ☐ Simon: 2 m 90 cm
- ☐ Ellen: 3 m 10 cm
- ☐ Lili: 20 m 70 cm
- ☐ Max: 3 m 20 cm
- ☐ Jan: 3 m

Begründe deine Wahl.



Abbildung 4: Aufgabe „Weitsprung“, VERA-3 Mathematik 2013

4. Anregungen für den Unterricht

Aufgaben wie die in VERA3 können nicht nur zur Feststellung des Leistungsstandes, sondern auch zur unterrichtlichen Förderung von Kompetenzen dienen. Dabei sei betont, dass nicht die Aufgaben per se bei den Schülerinnen und Schülern zur Ausformung, Festigung und Weiterentwicklung der zu ihrer Lösung benötigten Kompetenzen führen, sondern nur eine den Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler angepasste Auswahl kompetenzorientierter Aufgaben und deren adäquate Behandlung im Unterricht. Die Lernenden müssen – so belegen viele empirische Untersuchungen – ausreichend Gelegenheiten haben, die entsprechenden kompetenzbezogenen Tätigkeiten (wie Argumentieren oder Modellieren) selbst zu vollziehen, mehr noch, über diese Tätigkeiten zu reflektieren, Lösungswege zu begründen, verschiedene Wege zu vergleichen, Ergebnisse kritisch zu diskutieren und vieles andere mehr. Die Ergebnisse nationaler und internationaler Leistungsvergleiche weisen darauf hin, dass im Mathematikunterricht noch bewusster und noch konsequenter als bislang die umfassende Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler im Mittelpunkt der Arbeit stehen sollte. In einem so verstandenen „kompetenzorientierten Unterricht“ achtet die Lehrkraft noch mehr als bisher auf die individuellen Kompetenzstände der Kinder und macht Aufgabenangebote für verschiedene Leistungsniveaus.

So ist insbesondere auch im Bereich *Größen und Messen* mit unterschiedlichen Vorerfahrungen der Schülerinnen und Schüler zu rechnen. Tätigkeiten im Unterricht knüpfen an Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler an. Insbesondere das Verständnis von Messen und Maßen und die Erarbeitung der verschiedenen Größenbereiche (Geldwerte, Längen, Zeitspannen, Gewichte und Rauminhalte) stehen im Vordergrund. Ein Schwerpunkt bei der Arbeit mit Größen ist die Entwicklung von Größenvorstellungen. Sie sind grundlegend beim Schätzen und auch bei der Bewertung von errechneten Ergebnissen in Sachkontexten. Größenvorstellungen entwickeln sich vor allem durch handlungsorientiertes Arbeiten. Es gilt, vielfältige Gelegenheiten zum Vergleichen, Messen und Schätzen zu schaffen und diese regelmäßig im Unterricht immer wieder aufzugreifen.

Unterricht, der auf den Aufbau von Kompetenzen im Bereich *Muster und Strukturen* abzielt, sollte diese Leitidee in allen anderen Kompetenzbereichen mitdenken. Das Erkennen, Be-

schreiben und Weiterführen von Mustern sind grundlegende Tätigkeiten in der Mathematik: Muster zeigen sich in der Geometrie (Parkette, Bandornamente, Symmetrien) und in der Kombinatorik beim Strukturieren von Lösungsmöglichkeiten, aber vor allem auch bei strukturierten Päckchen, Aufgabenfolgen oder zahlreichen produktiven Übungsformen, wie Rechendreiecke, Rechenmauern, usw.

Viele weitere Vorschläge für kompetenzorientiertes Unterrichten sind z. B. in Bruder/Büchter/Leuders (2008), Blum et al. (2006) oder Walther et al. (2012) enthalten.

Die hier stichwortartig genannten Aspekte sind kennzeichnend für „Unterrichtsqualität“ im Fach Mathematik. Etwas systematischer kann man dabei drei Komponenten unterscheiden³.

- Eine *fachlich gehaltvolle Unterrichtsgestaltung*, die den Kindern immer wieder vielfältige Gelegenheiten zu kompetenzbezogenen Tätigkeiten bietet (zum mathematischen Modellieren, zum Argumentieren, zum Kommunizieren usw.) und bei der vielfältige Vernetzungen sowohl innerhalb der Mathematik als auch zwischen Mathematik und Realität hergestellt werden.
- Eine *konsequente kognitive Aktivierung der Lernenden* in einem Unterricht, der geistige Schülertätigkeiten herausfordert, selbständiges Lernen und Arbeiten ermöglicht und ermutigt, lernstrategisches Verhalten (heuristische Aktivitäten) fördert und ein stetes Nachdenken über das eigene Lernen und Arbeiten (metakognitive Aktivitäten) stimuliert.
- Eine *effektive und schülerorientierte Unterrichtsführung*, bei der verschiedene Formen und Methoden flexibel variiert werden, Stunden klar strukturiert sind, eine störungspräventive und fehleroffene Lernatmosphäre geschaffen wird und Lernen und Beurteilen erkennbar getrennt sind.

Es gibt sicher keinen universellen Königsweg zum Unterrichtserfolg. Man weiß aber aus vielen empirischen Untersuchungen, dass Unterricht nur dann positive Effekte haben kann, wenn hinreichend viele dieser Qualitätskriterien erfüllt sind (vgl. u. a. Helmke 2006).

Ein naheliegender Weg zur Realisierung eines solchen Unterrichts im Fach Mathematik ist die Verwendung eines breiten Spektrums kompetenzorientierter Aufgaben, darunter auch „selbstdifferenzierende“ (d. h. Aufgaben, die Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus ermöglichen und dadurch für stärkere wie schwächere Schülerinnen und Schüler gleichermaßen geeignet sind).

Gerade offenere Aufgabenvarianten sind hier besonders gut geeignet, da sie Schülerinnen und Schülern ermöglichen, entsprechend ihrer Fähigkeiten eigene Wege zu gehen und selbständig Lösungen zu finden. Die Lehrkraft kann dabei versuchen, möglichst viele dieser Lösungswege zu beobachten und im Bedarfsfall unterstützend einzugreifen, und sie kann nach der Bearbeitung unterschiedliche Schülerlösungen präsentieren und diskutieren lassen.

5. Literaturverzeichnis

Blum, Werner 2006: Die Bildungsstandards Mathematik. Einführung. In W. Blum, C. Drükere, R. Hartung & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (S. 14-32); Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Bruder, Regina / Büchter, Andreas / Leuders, Timo (Hrsg.) 2008: *Mathematikunterricht entwickeln*. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.

Helmke, Andreas 2006: Was wissen wir über guten Unterricht? *Pädagogik*, 2, 42-45.

³ Man vgl. dazu das einleitende Kapitel in Blum et al. (2006).

- Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen 2013: Kompetenzstufenmodell zu den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)“ in der Fassung vom 11.02.2013. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/ksm>)
- Kultusministerkonferenz 2005: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4). Beschluss vom 15.10.2004. (<https://www.iqb.hu-berlin.de/bista/subject> und <http://www.kmk.org/bildung-schule/qualitaetssicherung-in-schulen/bildungsstandards/ueberblick.html>)
- Reiss, Kristina / Roppelt, Alexander/ Haag, Nicole/ Pant, Hans Anand/ Köller, Olaf 2012: Kompetenzstufenmodelle im Fach Mathematik. In P. Stanat, H. A. Pant, K. Böhme & D. Richter (Hrsg.), *Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern am Ende der vierten Jahrgangsstufe in den Fächern Deutsch und Mathematik* (S.72-84); Münster: Waxmann.
- Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2008: Step by step. Ein Kompetenzstufenmodell für das Fach Mathematik. *Grundschule*, 40 (10), 34-37.
- Reiss, Kristina / Winkelmann, Henrik 2009: Kompetenzstufenmodelle für das Fach Mathematik im Primarbereich. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 120-141); Weinheim: Beltz.
- Walther, Gerd / van den Heuvel-Panhuizen, Marja / Granzer, Dietlinde / Köller, Olaf (Hrsg.) 2012: *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret*; Berlin: Cornelsen.
- Winkelmann, Henrik / Robitzsch, Alexander 2009: Modelle mathematischer Kompetenzen: Empirische Befunde zur Dimensionalität. In D. Granzer, O. Köller, A. Bremerich-Vos, M. van den Heuvel-Panhuizen, K. Reiss & G. Walther (Hrsg.), *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. Leistungsmessung in der Grundschule* (S. 169-196); Weinheim: Beltz.