



SACHSEN-ANHALT

Ministerium für Bildung

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2023

MATHEMATIK
(GRUNDLEGENDES ANFORDERUNGSNIVEAU)

Prüfungsaufgabe Prüfungsteil 2

Arbeitszeit: 195 Minuten

Es sind die drei Pflichtaufgaben zu bearbeiten.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Aufgabe 3: Stochastik

Name, Vorname: _____

Aufgabe 1: Analysis

1.1

Die Abbildung 1 zeigt die Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktionen f und g mit

$$f(x) = -(x^2 - x - 1) \text{ und } g(x) = e^x.$$

Die beiden Graphen haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y -Achse.

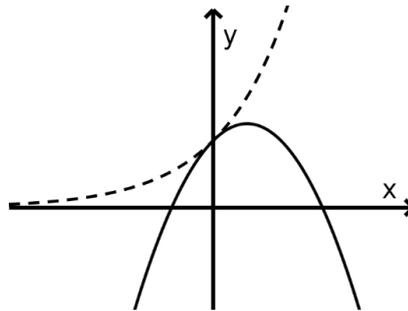


Abbildung 1

- | | |
|---|---|
| a) Berechnen Sie die Nullstellen und die Extremstelle von f . | 3 |
| b) Beschreiben Sie, wie man den Abstand zwischen dem Graphen von f und der Gerade mit der Gleichung $y = 4$ berechnen könnte. | 2 |
| c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, in dem der Graph von g die Gerade mit der Gleichung $y = 4$ schneidet. | 4 |
| d) Zeigen Sie, dass die Graphen von f und g in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an. | 4 |
| e) Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, das die Graphen von f und g und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ begrenzen. | 4 |

BE

Fortsetzung auf Seite 3

1.2

Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen.

Die in \mathbb{R} definierte Funktion w beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle.

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.

Die Abbildung 2 zeigt den Graphen von w .

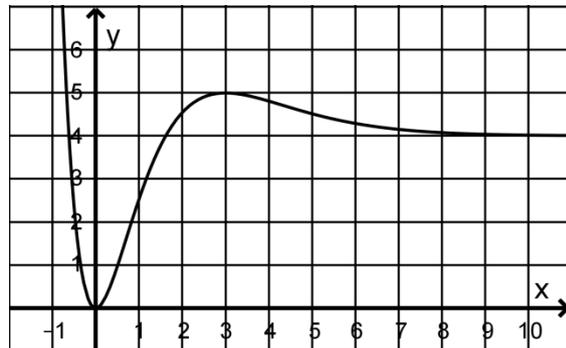


Abbildung 2

- a) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung 2 das Volumen des Wassers, das vom Zeitpunkt vier Sekunden nach Beobachtungsbeginn bis zum Zeitpunkt sechs Sekunden nach Beobachtungsbeginn an der Messstelle vorbeifließt. 3
- b) Bestimmen Sie für die ersten elf Sekunden nach Beobachtungsbeginn mithilfe der Abbildung 2 die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt, zu dem sie am stärksten abnimmt. 3
- c) Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(1 | w(1))$ wird durch die Gleichung $y = t(x)$ dargestellt. 3

Interpretieren Sie die folgende Aussage im Sachzusammenhang:

$$\text{Für alle Werte von } x \text{ mit } 0,7 \leq x \leq 1,4 \text{ gilt } \left| \frac{t(x) - w(x)}{w(x)} \right| < 0,05 .$$

1.3

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist eine in \mathbb{R} definierte Funktion w_a mit

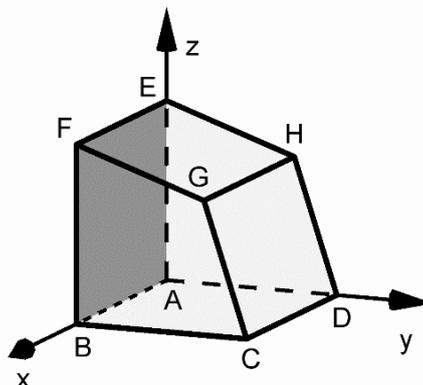
$w_a(x) = 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} + a$ gegeben. Unabhängig von a sind 0 und 3 die einzigen Extremstellen von w_a .

Die Funktion w_4 ist die in der Aufgabe 1.2 betrachtete Funktion w , die obige Abbildung zeigt also den Graphen von w_4 .

- a) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters a auf den Graphen von w_a . 1
- b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den der Mittelpunkt der Strecke zwischen den beiden Extrempunkten des Graphen von w_a auf der x -Achse liegt. 4
- c) Berechnen Sie den Wert des Terms $w_4(3)$. Geben Sie alle Werte von a an, für die w_a genau eine Nullstelle hat. 4

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Ein Anbau eines Gebäudes wird modellhaft durch das abgebildete Prisma mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(5|0|0)$, $C(5|4|0)$, $D(0|4|0)$, $E(0|0|4)$, $F(5|0|4)$, $G(5|3|3)$ und $H(0|3|3)$ beschrieben. Das Viereck EFGH stellt das Glasdach dar, das Viereck ABFE eine geschlossene Wand; die anderen Seiten des Anbaus bestehen vollständig aus Glas.
 Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht einem Meter in der Realität.
 Die xy -Ebene beschreibt den Untergrund, auf dem der Anbau steht.



BE

- a) Begründen Sie, dass das Viereck BCGF ein Drachenviereck ist. 3
- b) Die Ebene L , in der die Punkte A , B und G liegen, kann durch eine Gleichung der Form $r \cdot y + s \cdot z = 0$ dargestellt werden. Bestimmen Sie passende Werte für r und s . 2
- c) Begründen Sie, dass die Ebene L eine Symmetrieebene des Körpers ABCDEFGH ist. 3
- d) Die beiden folgenden Rechnungen I und II liefern das Volumen des Anbaus: 2

$$\text{I } 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 = 60 \qquad \text{II } 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

Erläutern Sie für eine der beiden Rechnungen den zugrunde liegenden Gedankengang.

Auf dem Glasdach kann ein Rollo herabgelassen werden. Dabei bewegt sich das Rollo innerhalb einer Minute von der oberen Kante des Dachs, die durch \overline{EF} dargestellt wird, bis zur unteren Kante des Dachs.

- e) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit, mit der das Rollo herabgelassen wird, in Zentimeter pro Sekunde. 2

Zu einem bestimmten Zeitpunkt kann das auf den Anbau treffende Sonnenlicht durch

parallele Geraden mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ beschrieben werden.

- f) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem das Sonnenlicht auf den Untergrund trifft. 3
- g) Die geschlossene Wand sowie der Schatten, den das vollständig herabgelassene Rollo auf dieser Wand erzeugt, sollen – in Form einer gesonderten zweidimensionalen Zeichnung – in der xz -Ebene grafisch dargestellt werden. Die folgende Rechnung stellt einen wesentlichen Schritt zur Lösung dieser Aufgabe dar: 5

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ liefert } \mu = 3 \text{ und damit } (3|0|-3).$$

Beschreiben Sie die Bedeutung dieses Lösungsschritts und fertigen Sie die angestrebte Zeichnung an.

Aufgabe 3: Stochastik

	BE
<p>3.1 Von den Lehrkräften eines Landes arbeiten 25 % an einem Gymnasium. 15 % der Lehrkräfte sind weiblich und arbeiten an einem Gymnasium. Insgesamt sind 72 % der Lehrkräfte weiblich.</p>	
a) Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.	3
b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Lehrkraft weiblich ist oder an einem Gymnasium arbeitet.	2
c) Eine zufällig ausgewählte Lehrkraft ist weiblich. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie an einem Gymnasium arbeitet.	2
100 Lehrkräfte werden zufällig ausgewählt.	
d) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter diesen 100 Lehrkräften die Anzahl derer, die nicht am Gymnasium arbeiten, mindestens viermal so groß ist, wie die Anzahl derer, die am Gymnasium arbeiten.	3
e) Geben Sie die Bedeutung des Terms $\sum_{k=75}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,75^k \cdot 0,25^{100-k}$ im Sachzusammenhang an.	2
<p>3.2 In einem Behälter befinden sich vier weiße und fünf schwarze Kugeln. Dazu wird ein Spiel angeboten. Der Spieler bezahlt zunächst einen Einsatz von 2 Euro; dieser Betrag wird neben dem Behälter ausgelegt. Anschließend muss der Spieler aus dem Behälter zweimal nacheinander eine Kugel zufällig ziehen und wieder zurücklegen. Nach jedem der beiden Züge wird der ausliegende Betrag vom Spielleiter verdoppelt, wenn eine weiße Kugel gezogen wird, und sonst halbiert. Nach dem Spiel erhält der Spieler den dann ausliegenden Betrag.</p>	
a) Der Term $8 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^2$ gibt den Erwartungswert für den Betrag in Euro an, den der Spieler nach dem Spiel erhält. Geben Sie die Bedeutung des zweiten der drei Summanden im Sachzusammenhang an und erläutern Sie Ihre Angabe.	3
b) Ermitteln Sie, wie das Verhältnis der Anzahlen der weißen und schwarzen Kugeln im Behälter gewählt werden müsste, damit Spieler und Spielleiter die gleiche Gewinnerwartung haben.	5