Basiswissen Gleichungen

BLK-MODELLVERSUCHS
PROGRAMM
Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts

SINUS
in Sachsen-Anhalt

„Sicherung von Basiswissen – Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus“

Modul 4

SACHSEN
ANHALT

Landesinstitut für Lehrerfortbildung,
Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung

Basiswissen Gleichungen

„Sicherung von Basiswissen - Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus“

Modul 4

Das BLK-Modellversuchs-Programm „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (SINUS) wird durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) und durch die Kultusminister der Länder gemeinsam gefördert.
Förderkennzeichen: A 6674

Der Modellversuch hat eine Laufzeit vom 01.04.1998 bis 31.03.2003

Herausgeber:	Sachsen-Anhalt Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt Kleine Steinstraße 7 06108 Halle (Saale)	
Projektleiter:	Lichtenberg, Willi	LISA Halle (bis 31.12.2000)
	Dr. Pruzina, Manfred	LISA Halle (ab 06.08.2001)
Redaktion:	Dr. Pruzina, Manfred	LISA Halle
Layout:	Schoebbel, Christiane	
Arbeitsgruppe:	Eckhardt, Margit	G.-Cantor-Gymnasium Halle
	Grosch, Rolf	IGS „W. Brandt” Magdeburg
	Grünewald, Marlies	Sekundarschule „Adam Ries“ Halle
	Hoffmann, Uwe	Francisceum Zerbst
	Lange, Udo	Sekundarschule „J. W. v. Goethe“ Stendal
	Pralow, Steffi	IGS „W. Brandt” Magdeburg
	Dr. Pruzina, Manfred	LISA Halle
	Rafler, Cornelia	Christian-Wolff-Gymnasium Halle
	Schulze, Martina	Sekundarschule „Adam Ries“ Halle
Druck:	RUPA-DRUCK DESSAU	

LISA HALLE 2002 – 1. Auflage – 900 Exemplare

VORWORT

Der Modellversuch „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“ (SINUS) wurde von der Bund-Länder-Kommission für Bildungsplanung und Forschungsförderung (BLK) als eine Reaktion auf die 1997 veröffentlichten TIMSS-Ergebnisse aufgelegt.

Das Land Sachsen-Anhalt beteiligte sich mit einem Schulset (6 Schulen) daran, und zwar mit zwei Sekundarschulen, drei Gymnasien und einer Integrierten Gesamtschule.

Die Projektleitung wurde im Auftrage des Kultusministeriums von Mitarbeitern des Landesinstituts für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt (LISA) wahrgenommen.

In einer überschulischen Arbeitsgruppe entwickelten Lehrkräfte der Modellversuchsschulen Ideen, Konzepte und Materialien für die Unterrichtspraxis, um die Qualität des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts zu verbessern. Diese wurden im Unterricht der Modellversuchsschulen erprobt, überarbeitet und zugehörige methodisch-didaktische Erfahrungen bilanziert.

Bei der Zusammenstellung der entwickelten Materialien, Ergebnisse und Erfahrungen in den vorliegenden Heften wurde großer Wert darauf gelegt, ausreichend Informationen für die Nachnutzung anzubieten.

Auf die Frage, welches die wichtigste Erfahrung der „SINUS-Lehrkräfte“ im Modellversuch ist, ergab sich in der Endphase des Modellversuches folgende Antwort:

„Die Arbeit im Modellversuch forderte und förderte die konkrete und ergebnisorientierte **Kommunikation und Kooperation der Lehrkräfte** verschiedener Schulen. Das Erproben der entwickelten Konzepte auf der Ebene der Schulen stimulierte wiederum das Auseinandersetzen mit inhaltlichen und methodischen Konzepten innerhalb der Schule.“

Die auf die praktische Unterrichtsarbeit zielende Kommunikation einschließlich verbindlicher Absprachen wird als wesentliche Bereicherung empfunden.

Dies ist sicher nicht neu, doch diese alte Erfahrung im schulischen Alltag umzusetzen, sie zu praktizieren, das ist immer wieder eine neue Herausforderung.

In diesem Sinne wünschen sich die Autorinnen und Autoren, dass das vorliegende Heft Anlass für Diskussionen in der Fachschaft ist und auf diesem Wege einen Beitrag zur Steigerung der Effizienz des Unterrichts leistet.

Dr. Siegfried Eisenmann
Präsident

Das Programm SINUS

Das BLK-Programm SINUS („Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“) hat zum Ziel, durch Förderung einer schulinternen und schulübergreifenden Kooperation und Zusammenarbeit von Lehrkräften und Mitarbeitern von Bildungseinrichtungen des Bundes und der jeweiligen Länder die Effizienz des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts zu verbessern. Bundesweit beteiligen sich 180 Schulen, die in regionale Schulsets gebündelt sind.
Das Programm wird jeweils zur Hälfte aus Mitteln des Bundes und des Landes Sachsen-Anhalt finanziert.

Für das gesamte Programm auf Bundesebene ist das Institut für die Praxis der Naturwissenschaften Kiel (http://www.ipn.uni-kiel.de/projekte/blk_prog/blkstefr.htm)
in Zusammenarbeit mit dem Staatsinstitut für Schulpädagogik und Bildungsforschung München (http://www.isb.bayern.de/) und dem Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik der Universität Bayreuth (http://blk.mat.uni-bayreuth.de/) verantwortlich.

Für Sachsen-Anhalt wurde das Landesinstitut für Lehrerfortbildung, Lehrerweiterbildung und Unterrichtsforschung von Sachsen-Anhalt (LISA) durch das Kultusministerium beauftragt, die Leitung und Koordination des Programms auf Landesebene zu übernehmen (http://www.modellversuche.bildung-lsa.de/).

Seit Beginn des Schuljahres 1998/99 beteiligen sich sechs Schulen aus Sachsen-Anhalt an diesem Programm, deren gemeinsame Arbeit sich auf 3 Module konzentriert:

Modul 2: „Naturwissenschaftliches Arbeiten“,
Modul 4: „Sicherung von Basiswissen – Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus“,
Modul 5: „Zuwachs von Kompetenz erfahrbar machen: Kumulatives Lernen“.

Inhaltsverzeichnis

1 Zum Umgang mit dem Material

Das vorliegende Material hat eine Arbeitsgruppe erstellt, die sich in ihrer Tätigkeit auf die sichere Aneignung von Basiswissen durch verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus (Modul 4 des Programms) im Fach Mathematik konzentriert.
Das Material soll zur Umsetzung dieses Schwerpunktes für ausgewählte Stoffgebiete des Mathematikunterrichts (hier: zum Thema Gleichungen) Anregung und Unterstützung geben. Neben grundlegenden stoffbezogenen Kenntnissen, Fähigkeiten und Fertigkeiten besteht ein Schwerpunkt in der Entwicklung von **Methodenkompetenz** im Zusammenhang mit dem Lösen von vielfältigen inner- und außermathematischen Aufgaben.

Die Mitglieder der Arbeitsgruppe sind auf Grund ihrer Erfahrungen (bestätigt durch TIMSS und PISA) davon überzeugt, dass

- **kontinuierlich und systematisch durchgeführte Festigungsphasen zur Aneignung grundlegender Kenntnisse und Methoden** über den Zeitraum der Schuljahrgänge 7 bis 10 hinweg notwendig sind. Neben dem Festigen von Basiskenntnissen sind auch solche Methoden zu erlernen, die z. B. die Analyse von Sachverhalten aus gegebenen Texten und anderen Darstellungen ermöglichen oder die dem selbstständigen Entwickeln von Lösungsstrategien dienen,
- ein **verändertes didaktisches Unterrichtsverhalten** der Lehrkräfte notwendig ist. Die Betonung liegt hierbei z. B. auf dem Bearbeiten vielfältiger Varianten ein und derselben Aufgabenstellung, auf der bewussten Gestaltung und Nutzung von Aufgaben mit unterschiedlichem Anspruchsniveau, auf dem Herausfordern verschiedener Lösungswege und der anschließenden Rückbesinnung (Reflexion der Methode).

Das vorliegende Material soll helfen, diese Zielen im Unterricht zu verwirklichen.
Dabei geht es vor allem um das kontinuierliche und systematische Üben mit vielfältigen Aufgabenstellungen, zum Beispiel in Form von

- Täglichen Kurzübungen zu <u>einem</u> oder mehreren Schwerpunkten innerhalb der betreffenden Stoffgebiete,
- Täglichen Kurzübungen/Übungsstunden/Übungseinheiten zur Wiederholung und Festigung bestimmter Schwerpunkte (stoffgebietsübergreifend),
- Hausaufgaben.

Zur langfristigen Planung der Übungsphasen ist eine Planungsübersicht (*Kapitel 3* dieses Materials) erstellt worden, die das kontinuierliche Wiederaufgreifen einzelner Schwerpunkte erleichtern soll. Die Gliederung der Aufgabenvorschläge (*Kapitel 4)* folgt der Gliederung der Schwerpunkte des Basiswissens im *Kapitel 2.*

2 Basiswissen zu Gleichungen

Gleichungen und Ungleichungen sind ein grundlegender Bestandteil des Mathematik-unterrichts.
Die Gleichungslehre wird in den einzelnen Klassenstufen schrittweise aufgebaut, systematisch erweitert und vertieft. Gleichzeitig bestehen zahlreiche Querverbindungen zu anderen mathematischen Themen, z. B. zu den Funktionen.
Die Gleichungen und Ungleichungen sind nicht nur für die Mathematik von Bedeutung, sie sind auch eine wichtige Grundlage für andere Unterrichtsfächer (z. B. Physik) bzw. Wissensgebiete wie z. B. Technik und Ökonomie.
Bereits in der Grundschule werden die Schülerinnen und Schüler mit Gleichungen und Ungleichungen vertraut gemacht. Sie erwerben dort erste Vorstellungen über die grundlegenden Begriffe und werden an das inhaltliche Lösen von „einfachen" Gleichungen bzw. Ungleichungen herangeführt.

Die Rahmenrichtlinien wurden dahingehend analysiert, welches Wissen und Können aus dem Gebiet der Gleichungen und Ungleichungen zum **Basiswissen**[1] zu zählen ist.
Unsere Analyse ergab folgenden „Katalog“.

<u>GL1. Verständnis grundlegender Begriffe zu Gleichungen</u>

GL1.1 Verständnis für die Begriffe: Term, Gleichung, Ungleichung, wahre und falsche Aussage, Lösung, Lösungsmenge, Grundbereich und Probe
GL1.2 Fähigkeiten im inhaltlichen Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen

<u>GL2. Kalkülmäßiges Lösen von Gleichungen</u>

GL2.1 Umformen von Termen
GL2.2 Äquivalentes Umformen von Gleichungen
GL2.3 Lösen von linearen Gleichungen

<u>GL3. Lösen von Gleichungssystemen und quadratischen Gleichungen</u>

GL3.1 Grafisches Lösen

[1] Basiswissen wird hier in einem weiteren Sinne verstanden und schließt nicht nur Wissen, sondern auch Können ein.

GL3.2 Rechnerisches Lösen von linearen Gleichungssystemen
GL3.3 Rechnerisches Lösen von quadratischen Gleichungen

GL4 Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben

GL4.1 Textanalysen sicher ausführen können
GL4.2 Aufstellen von mathematischen Modellen
GL4.3 Überprüfen der Lösungen am Sachverhalt

3 Planung von Übungsphasen

3.1 Schuljahrgang 7

Stoffeinheit/Thema	Inhalt/Aufgabentyp (Lernziel)	Hinweise/Material
Rationale Zahlen, Prozentrechnung	Erkennen rationaler Zahlen; Einsetzen rationaler Zahlen zur Bestimmung der Lösungsmenge	Auswahl aus 4.1, Nr.1-3; 7; 11
Gleichungen	Lösen von Gleichungen/Ungleichungen; Finden von rationalen Zahlen, die eine Gleichung/Ungleichung erfüllen	Auswahl aus 4.1; Nr. 3; 10-13; 14a,b,c 4.2, Nr. 3; 9; 10; 12; 13
Zufall/Häufigkeiten		
Viereck/Kreis	Ermitteln von Seitenlängen bei Rechtecken und Quadraten	Auswahl aus 4.4 , Nr. 3; 25; 28; 29
Prismen		
Anwendungen	Lösen von Anwendungsaufgaben	Auswahl aus 4.4, Nr. 3; 25; 28;29

3.2 Schuljahrgang 8

Stoffeinheit/Thema	Inhalt/Aufgabentyp (Lernziel)	Hinweise/Material
Variable/Gleichung	Lösbarkeit von Gleichungen/Ungleichungen in Abhängigkeit vom Variablengrundbereich	Auswahl aus 4.1 , Nr. 2-4; 8; 9; 4.2, Nr. 1; 2; 3; 4-8
Funktionen	Zahlenpaare als Lösung für Gleichungen mit zwei Unbekannten; Finden von Funktionsgleichungen	Auswahl aus 4.1 , Nr. 17 4.3, Nr. 4
Zufällige Ereignisse, Wahrscheinlichkeiten		
Berechnungen an Kreisen und Dreiecken Zylinder, Pyramiden	Ermitteln von Seiten und Winkeln zu Dreiecken	Auswahl aus 4.4, Nr. 2; 8
Anwendungen	Lösen von Anwendungsaufgaben	Auswahl aus 4.4.

3.3 Schuljahrgang 9

Stoffeinheit/Thema	Inhalt/Aufgabentyp (Lernziel)	Hinweise/Material
Arbeiten mit Variablen, Potenzen, Prozentrechnung	Erkennen rationaler Zahlen; Einsetzen rationaler Zahlen zur Bestimmung der Lösungsmenge	Auswahl aus 4.2, Nr. 1, 2, 4-8
Lineare Gleichungssysteme	rechnerische und grafische Lösbarkeit von Gleichungssystemen; Finden geeigneter Lösungsverfahren	Auswahl aus 4.3, Nr. 1-3; 4-8; 12; 13; 14-16
Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen	Bestimmen der Lösungsmenge aus grafischen Darstellungen; Anwenden der Lösungsformel zur Berechnung quadratischer Gleichungen	Auswahl aus 4.3, Nr. 9; 10; 11 4.3, Nr. 19
Häufigkeitsverteilungen		
Tabellenkalkulation		
Ähnlichkeit		
Anwendungen	Lösen von Anwendungsaufgaben	Auswahl 4.4

3.4 Schuljahrgang 10

Stoffeinheit/Thema	Inhalt/Aufgabentyp (Lernziel)	Hinweise/Material
Trigonometrie, Winkelfunktionen		
Körperdarstellung, Körperberechnung	Anwendungen zur Flächenberechnung	Auswahl aus 4.4, z.B. 28,29
Gleichungen, Gleichungssysteme und Ungleichungen	Auswahl und Anwendung von Lösungsverfahren	Auswahl aus 4.2, z.B. 12-20 Auswahl aus 4.3, z.B. 12-17, 19
Funktionen/Systematisierung	Grafisches Lösen von Gleichungen	Auswahl aus 4.3, z.B. 1-11
Zufallsversuche		
Aufgabenpraktikum	Sicherung eines Abschlussniveaus Lösen von Aufgaben aus verschiedenen Anwendungsbereichen	Auswahl aus 4.4

4 Aufgabenbeispiele zu den inhaltlichen Schwerpunkten

Anmerkung:
Sollte kein Variablengrundbereich angegeben sein, wird immer der größtmögliche angenommen.

4.1 Verständnis grundlegender Begriffe zu Gleichungen

Verständnis für die Begriffe: Term, Gleichung, Ungleichung, wahre und falsche Aussage, Lösung, Lösungsmenge, Grundbereich und Probe

1. Welche Zahl wird dargestellt?

   a) $x^2 - 2x$ für $x = -3$

   b) $3 \cdot \sqrt{a^2 + 11}$ für $a = 5$

   c) $\frac{z}{x+y}$ für $x = 1;\ y = -2;\ z = 0{,}5$

2. Gib einen sinnvollen Grundbereich für eine Variable an, die folgendes beschreibt:

   a) Anzahl der Fahrten eines 3-Tonners, mit dem 10 t Kies zu einer Baustelle gebracht werden sollen;

   b) voraussichtliche Zeit für eine Wanderung zu einem 7 km entfernten Ziel;

   c) Kontostand nach mehreren Ein- und Auszahlungen.

3. Für welche der angegebenen Zahlen wird beim Einsetzen für die Variable aus der Gleichung bzw. Ungleichung eine wahre Aussage?

   a) $2x - 7 = 15$ 10; 11; 12

   b) $\frac{5}{a} < 2$ 1; 2; 3

   c) $z : 6 = 5 : 3$ 10; 12; 18

   d) $3x > 4x$ -1; 0; 1

4. Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe!
   a) $2x>3$ wird durch $x=1.5$ erfüllt.
   b) $2n=0$ hat für $n \in N$ keine Lösung.
   c) Es gibt eine Gleichung, die die Lösung 5 hat.
   d) Es gibt keine Gleichung, die die Lösung 1 hat.
   e) Die Gleichung $3x=1$ hat in Q_+ genau eine Lösung.
   f) Es gibt eine Gleichung, die unendlich viele Lösungen hat.
   g) Es gibt eine Gleichung, die keine Lösung hat.

5. Gib eine Ungleichung an, die für den Grundbereich **N**
   a) die Lösungen 0, 1, 2 (und keine anderen),
   b) die Lösungen 4, 5, 6 ... (und keine anderen),
   c) keine Lösungen

   hat!

6. Gib einen Grundbereich an, für den die Ungleichung $2x + 3 < 6$
   a) nur die Lösungen 0 und 1
   b) unendlich viele positive, aber keine negativen Lösungen hat!

7. Welche Zahlen darf man für x nicht einsetzen?

   a) $\frac{1}{x-2}$ b) $\frac{4}{x-3}+\frac{2}{x-1}$

   c) $\frac{1}{2x-2}$ d) $\frac{4}{2x+1}$

8. Welche der Gleichungen bzw. Ungleichungen (1) bis (6) sind nicht lösbar, wenn man /N als Grundbereich wählt? Welche werden von jeder Zahl aus diesem Grundbereich erfüllt?

   (1) $2x = x + x$ (2) $3x > x$ (3) $0 \cdot x = 1$

   (4) $2 - x = 5$ (5) $\frac{1}{2}x > x$ (6) $x^2 < 0$

9. Gib je eine Gleichung an, die
   a) in Z genau eine und in N keine Lösung hat.
   b) in Q genau eine und in Z keine Lösung hat.
   c) in Q+ genau eine und in Q keine Lösung hat.
   d) in Q+ genau eine und in Q zwei Lösungen hat.

Fähigkeiten im inhaltlichen Lösen von Gleichungen bzw. Ungleichungen

10. Ermittle alle Zahlen aus dem Grundbereich, die die Gleichung erfüllen!

a) $3x = 8 \quad (x \in Q)$ b) $3x = 8 \quad (x \in Z)$

c) $x + 3{,}5 = 2 \quad (x \in Q+)$ d) $x + 3{,}5 = 2 \quad (x \in Q)$

e) $(x-1)(x+1) = 0 \quad (x \in Z)$ f) $(x-1)(x+1) = 0 \quad (x \in N)$

11. Versuche, jeweils eine rationale Zahl zu finden, die für x eingesetzt zu einer wahren Aussage führt!

a) $3x = 12$ b) $8x = 4$ c) $|x| = \frac{1}{3}$ d) $x = x + 2$

e) $\frac{1}{2}x < 16$ f) $x + 1 > x$ g) $3x < -1$

12. Löse die Gleichungen!

a) $13 + x = 7{,}5$ b) $\frac{2}{3}x = 14$ c) $17 : z = 34$

d) $3x + 5 = 2$ e) $5(x-3) = 35$ f) $3^m = 81$

g) $\sqrt{x+1} = 4$ h) $(a-2)^2 = 9$ i) $x + x = x$

k) $u \cdot 5 = 5 \cdot u$ l) $b + 1 = b$ m) $c(c+1) = c^2 + c$

13. Ermittle alle rationalen Zahlen, die die Gleichung erfüllen!

a) $|x| = 17$ b) $|x| = -2$ c) $|x| = 0$

d) $|x| - 2 = 0$ e) $|x| - 1 = 4$ f) $|x| + 3 = 9$

g) $|x| + 5 = 1$ h) $2|x| = 3$ i) $\frac{1}{3}x = 5$

14. Löse die Gleichungen!

a) $5|x| - 15 = 0$ b) $7|x| + 12 = 26$ c) $|x-5| = 1$

d) $|x+1| = 1$ e) $x^2 = 81$ f) $3x^3 = 24$

g) $x(x-3) = 0$ h) $(x+1)(x-2) = 0$

15 Löse die Ungleichung! Veranschauliche die Lösungsmenge an einer Zahlengeraden!

a) $x+3<5$ b) $z-5<0$ c) $x+8>1$

d) $4<x+3$ e) $5<\frac{2}{3}x$

16. Gib an, welche Zahlen nicht im Grundbereich enthalten sein dürfen, und löse die Gleichung!

a) $\frac{39}{x}=13$ b) $\frac{5}{x}=10$ c) $\frac{7}{x}=0$

d) $\frac{9}{a}=6$ e) $\frac{0{,}3}{x}=1{,}5$ f) $\frac{21}{15}=\frac{7}{y}$

17. Gib jeweils 5 Zahlenpaare an, die die Gleichung erfüllen! Stelle diese Zahlenpaare in einem Koordinatensystem dar!

a) $x+3y=8$ b) $2x+y=5$ c) $2x-3y=7$

d) $4x-3y=0$ e) $2(x+3)=5y$

18. Löse folgende Gleichungen!

a) $x^2 = 9$ b) $x^2 = -4$ c) $x^2 = 16$

d) $(x-1)^2 = 9$ e) $(x+2)^2 = 4$ f) $(x+7)^2 = -9$

4.2 Kalkülmäßiges Lösen von Gleichungen

Umformen von Termen

1. Stelle mit Hilfe von Variablen dar.
   a) eine beliebige ungerade Zahl
   b) drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen
   c) den Nachfolger einer beliebigen geraden natürlichen Zahl
   d) eine durch 3 teilbare Zahl
   e) eine durch 3 und 4 teilbare natürliche Zahl

2. Ergänze.

	Mathematischer Sachverhalt in Textform	**Mathematischer Sachverhalt in Termform**
a)	das Doppelte einer Zahl vermindert um 7	
b)	ein Drittel einer Zahl vermehrt um 3	
c)		$\frac{a}{7}$
d)		a^2
e)		$\sqrt{b}$
f)		$\left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad (x \neq 0)$

3. Stelle für die folgenden „Zahlenrätsel“ eine Gleichung auf. Gehe dazu wie in Aufgabe a) vor, indem du schrittweise den Text „mathematisierst“.

   a) Multipliziert man eine Zahl mit 5 und addiert zum Ergebnis 9, so erhält man 94.

Gesuchte Zahl	x
Multipliziere mit 5	
Addiere 9	
So erhält man 94.	

   b) Subtrahiert man vom Dreifachen einer Zahl 14, so erhält man 52.

   c) Addiere 7 zum Dreifachen einer Zahl. Verdopple das Ergebnis und du erhältst 62.

   d) Subtrahiere eine Zahl von 7 und verdopple die Differenz. Du erhältst dasselbe Ergebnis, als wenn du das Achtfache der Zahl von 17 subtrahierst.

4. Löse die Klammer auf und fasse zusammen.

   a) $4a+(13b-8a)-(7b-10a)$
   b) $27y-(12x+38y)+(72-19x-21y)$
   c) $55ab-[23a-(29b-44ab)-61a]-38b$

5. Vereinfache soweit wie möglich.

   a) $8x\cdot(-2y)\cdot 3\cdot(-3y)$
   b) $12ab\cdot 8a\cdot(-3b)\cdot(-10a^2b)$
   c) $144rs : 24 \cdot 95rs^2 : 19$

6. Vereinfache soweit wie möglich.

   a) $7a \cdot 12b + 8a \cdot 4b + 9ab \cdot 3$
   b) $(-45x^2y) + 23x \cdot 7xy - (-65x^2y)$
   c) $12v^2 - 42\,w^2 : 14 + 4w \cdot w - 11v^2$

7. Fülle die Lücke ☺ aus.

   a) 4m(2m+☺) = 8m+12mn
   b) 3x(☺-7x) = 18xy-21x²
   c) (8pq-☺) 5p = 40p²q-25q²p

8. Multipliziere aus und fasse zusammen.

   a) $12(4a+11b)+15(6a-3b)$
   b) $(9x-15y) \cdot 7 - 12(8y+6x) + 98y$
   c) $(5x^2y-4xy^2-12xy) \cdot 6 - 6(5xy^2-4x^2y)$

<u>Äquivalentes Umformen von Gleichungen</u>

9. Führe die angegebene Umformung aus!

   a) $x+3=15 \quad /-3$
   b) $3x=-12 \quad /:3$
   c) $\frac{x}{3}=5 \quad /\cdot 3$
   d) $3-x=-2 \quad /+x$
   e) $7x=1 \quad /:x$
   f) $\frac{4}{x}=20 \quad /\cdot x$

10. Überprüfe, ob richtig umgeformt wurde!

   a) $2x+3=13 \quad /-3$
      $2x=13$
   b) $12x=36 \quad /:12$
      $12x=3$
   c) $12-3x=4x-23 \quad /+3x$
      $12=7x-23$
   d) $\frac{x}{x-1}=5 \quad /\cdot(x-1)$
      $x=5x-5$
   e) $\frac{5}{x}=7 \quad /\cdot x$
      $5x=7x$
   f) $2x+13=5x+7 \quad /-5x$
      $3x+13=7$

11. Untersuche, ob aus der ersten Gleichung die zweite folgt! Welche Umformung wurde vorgenommen?

   a) $\frac{2}{5}x=-4$
      $x=-20$
   b) $9-x=x+3$
      $9=2x+3$
   c) $\frac{x}{12}=\frac{5}{6}$
      $6x=60$

Lösen von linearen Gleichungen

Löse die Gleichungen!

12. a) $4+x=7$ b) $-3=8+x$ c) $x-\frac{7}{5}=\frac{3}{2}$

d) $4{,}5+a=-0{,}5$ e) $\frac{1}{5}x=2$ f) $\frac{5}{8}=-\frac{3}{4}u$

g) $0{,}25x=20$ h) $24=1{,}2y$ i) $0{,}6z=2{,}4$

13. a) $3x+2=5$ b) $5x-7=3$ c) $4x+12=0$

d) $\frac{3}{4}x-\frac{5}{4}=1$ e) $3m+1{,}4=2{,}6$ f) $0{,}5n+1{,}9=4{,}1$

g) $0{,}6x+2{,}8=7{,}6$ h) $0{,}1x-1{,}3=0{,}2$ i) $5{,}8=2{,}5x-1{,}7$

14. Bestimme die Lösungsmengen folgender Gleichungen im jeweils angegebenen Grundbereich!

a) $7x+5=9x+4-2x \quad (x\in Q)$

b) $6(a-4)=2a-(24+4a) \quad (a\in Q)$

c) $\frac{10}{x}=7 \quad (x\in Q)$

d) $8x=2(4x+3) \quad (x\in Q+)$

e) $2x+4+3x=5x+4 \quad (x\in Q)$

f) $5x+18-2x=3(x+6) \quad (x\in N)$

Löse die folgenden Gleichungen !

15. a) $8x+3-2x+1=0$ b) $3x-2+2x+1=9$

c) $0{,}2x+1{,}5-0{,}1x=4{,}5$ d) $1{,}2k-4{,}1+0{,}8k+0{,}6=3{,}5$

e) $2(x+1)=6$ f) $3(x-1)=9$

g) $7(1-x)=14$

16. a) $3x-(x-1)=3$ b) $5(x-2)-5x=1$ c) $2(x-1)+3(1-x)=0$

d) $2x+1=x+2$ e) $3x-2=2x+1$ f) $5x+1=3x+7$

g) $3b+2=5b-4$

17. a) $4(3x+8)-12x=32$ b) $(2y-7)\cdot 3-6y=21$

c) $(7y+2)\cdot 3-y=-4(4-y)$ d) $(2-3y)\cdot 2-2y=-8(y-\frac{1}{2})$

18. a) $(x-4)(x+5)=x^2-17$

b) $(x+3)(x-2)=(x-1)(x+5)+11$

c) $(x-8)^2=x^2-3(x+1)+(2x-8)$

d)* $3(x+\frac{1}{2})-4(x-\frac{1}{4})=5(x-\frac{3}{4})$

e)* $-12(5x-37)+6(7x+16)=5(8x+16)+2(6x-50)$

f)* $(x+1)^2+(x+2)^2=(x+4)^2+(x+3)^2+2x$

19. a) $\frac{5}{x}=\frac{1}{25}$ b) $\frac{-4}{15}=\frac{2}{3x}$ c) $\frac{2{,}5}{3{,}4}=\frac{0{,}8}{x}$

d)* $\frac{5}{a-2}=4$ e)* $\frac{5}{2x+1}=\frac{2}{3x-1}$ f)* $\frac{1}{2x-4}+\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2}$

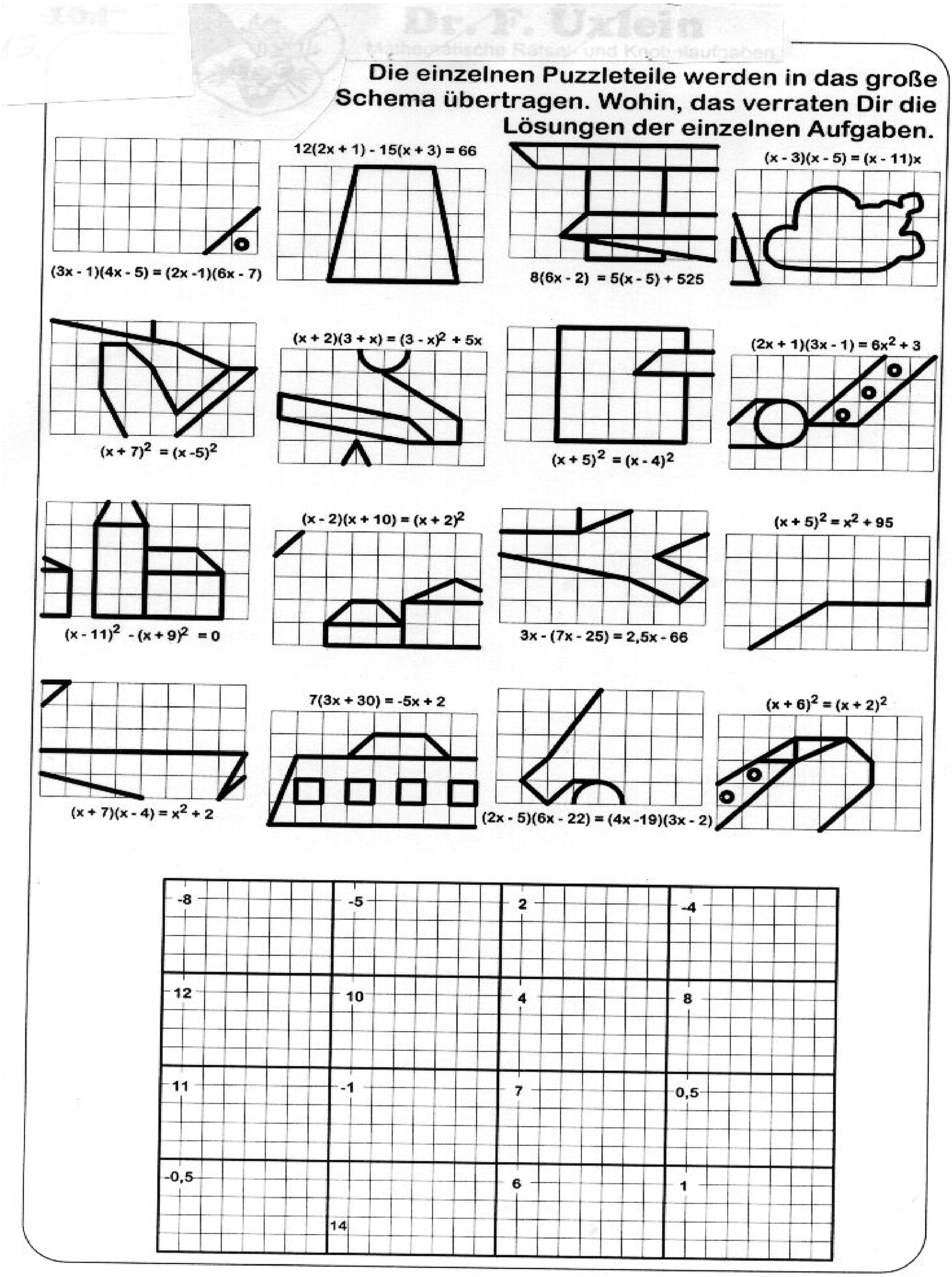
20.* a) $\frac{1}{x}=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{1}{2}+\frac{4}{x}=9$ c) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=0$

d) $\frac{x-1}{3}+\frac{x+1}{4}=4$ e) $\frac{1}{x-1}+5=\frac{4}{x-1}$

21. Gleichungen einmal anders.

Löse die Rätsel.

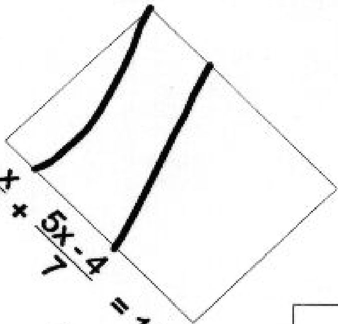
a)



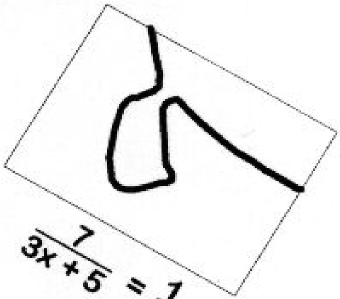
b)

Dr. F. Üxlein
Mathematische Rätsel- und Knobelaufgaben

Ein kleines Puzzle gefällig? Das geht zwar auch ohne großartige Rechnerei, aber wenn Du trotzdem die Gleichungen mit den Brüchen löst, erfährst Du, wohin Du das einzelne Puzzleteil übertragen mußt.

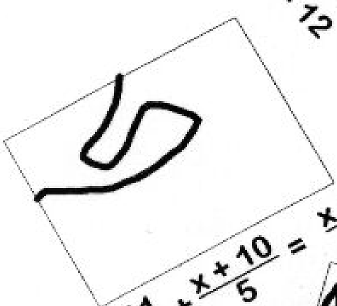


$$\frac{x}{3} + \frac{5x-4}{7} = 12$$

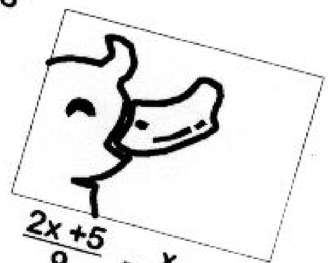


$$\frac{7}{3x+5} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{10}{7x+9} = \frac{1}{x}$$

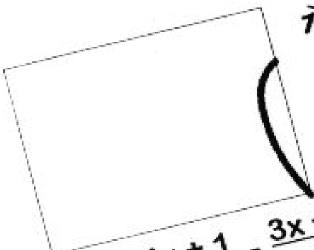


$$\frac{x-11}{2} + \frac{x+10}{5} = \frac{x-1}{2}$$

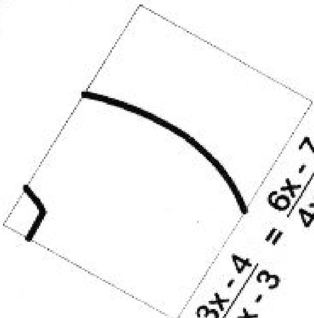


$$\frac{2x+5}{9} - \frac{x}{10} = 3$$

$$\frac{3}{17x-8} = \frac{1}{5x}$$



$$\frac{2x-4}{3} = \frac{4x+1}{3} - \frac{3x+4}{4}$$



$$\frac{3x-4}{2x-3} = \frac{6x-7}{4x-5}$$

8	20
3	12
4	1
17	15

4.3 Lösen von Gleichungssystemen und quadratischen Gleichungen

Grafisches Lösen

1. Löse folgende Gleichungssysteme grafisch!

a) $3x - y = 3$
   $x + 2y = 8$

b) $y = x - 4$
   $y = -x + 6$

c) $2x - y = -3$
   $x + y = 3$

d) $2x - y = 1$
   $x + 2y = 8$

e) $5x + 3y = 19$
   $6x - 2y = 6$

f) $y = -\frac{3}{4}x + 4$
   $y = \frac{1}{2}x - 1$

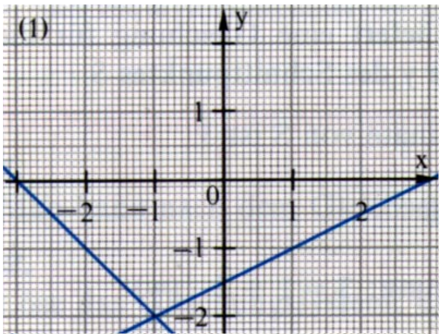
2. Löse die folgenden Gleichungssysteme grafisch! Gib die Lösungsmenge an!

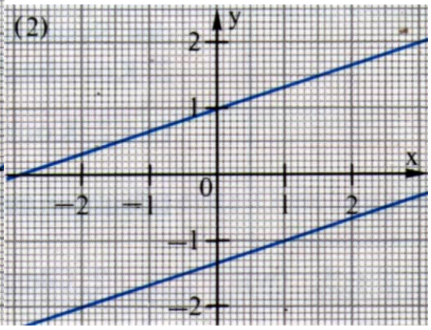
a) $4x + y = -2$
   $x + 3y = 5$

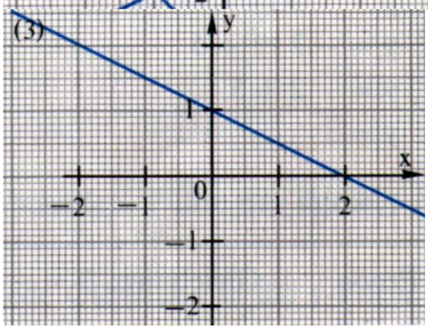
b) $2x + 3y = 12$
   $2x + 3y = 20$

c) $3x + y = 1$
   $-6x - 2y = -2$

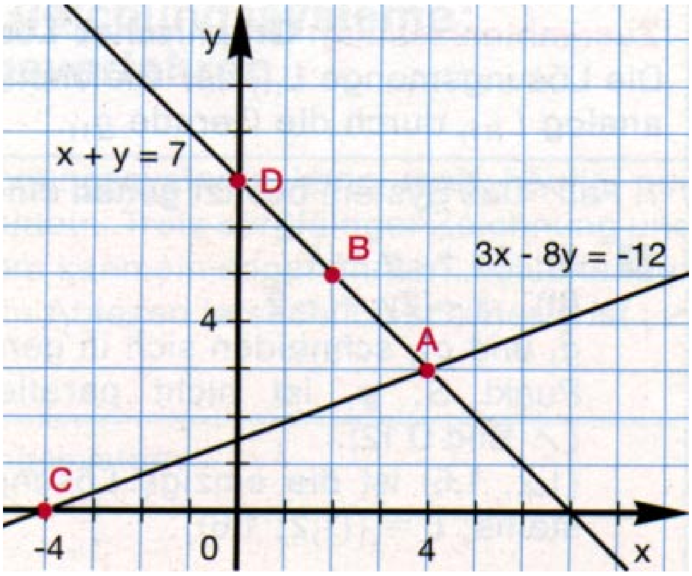
3. Gib jeweils das Gleichungssystem und seine Lösungsmenge an!







4. Im Bild sind die Geraden zu den linearen Gleichungen 3 x – 8 y = - 12 und x + y = 7 dargestellt.



   a) Lies die Koordinaten der Punkte A, B, C und D ab.

      Überprüfe durch Einsetzen in die Geradengleichungen, auf welcher Geraden die Punkte liegen!

   b) Wie kann man rechnerisch überprüfen, ob A der Schnittpunkte der beiden Geraden ist?

5. Löse das Gleichungssystem grafisch!

   x + 3 y = 18

   5 x – y = 26

   Überprüfe durch Einsetzen, ob die Koordinaten des Schnittpunktes beide Gleichungen erfüllen.

6. Begründe, warum das lineare Gleichungssystem keine Lösung hat.

   2 x + y = 3

   2 x + 4 = 4

7. Begründe, warum die beiden Gleichungen des linearen Gleichungssystems

   2 x + 3 y = 4

   - 4 x – 6 y = - 8

   dieselbe Lösungsmenge besitzen.

   Gib die Lösungsmenge an.

8. a) Welche Lage können zwei Geraden (in einer Ebene) zueinander einnehmen?
   b) Welche Fälle können demzufolge auftreten, wenn man ein lineares Gleichungssystem löst?
   c) Welches Aussehen hat die Lösungsmenge L in jedem der unter b) zu diskutierenden Fälle?

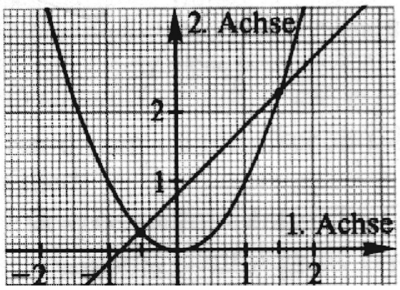
9. Bestimme mit Hilfe einer Zeichnung die Lösungsmenge. Forme – wenn nötig – die Gleichung zunächst geeignet um.

   a) $x^2 = 1{,}5\,x + 1$ b) $x^2 = 6{,}25$

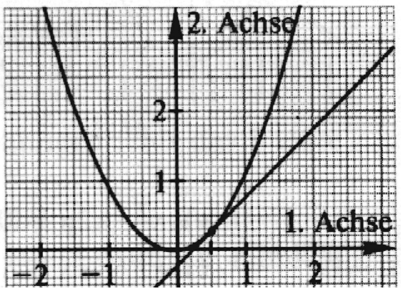
   c) $2x^2 - x + 2 = 0$ d) $\frac{1}{2}z^2 - z = 0$

10. Im Folgenden wurden die gegebenen quadratischen Gleichungen grafisch gelöst.
   a) Warum ist die Umformung sinnvoll?
   b) Lies jeweils die Lösungsmenge ab.

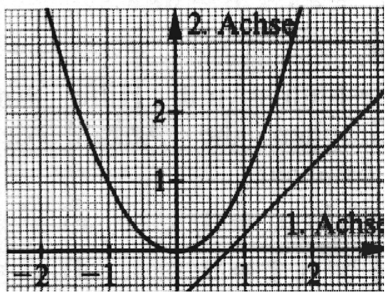
(1) $x^2 - x - \frac{3}{4} = 0$
$x^2 = x + \frac{3}{4}$



(2) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
$x^2 = x - \frac{1}{4}$



(3) $x^2 - x + \frac{3}{4} = 0$
$x^2 = x - \frac{3}{4}$



   c) Begründe anhand der Bilder:

   Eine quadratische Gleichung hat entweder zwei Lösungen oder eine Lösung oder keine Lösung.

11. Bestimme mit Hilfe von Graphen die Anzahl der Lösungen.

   a) $x^2 - 2 = 0$ b) $x^2 + 1 = 0$ c) $x^2 = 0$

   d) $x^2 + 2x = 0$ e) $x^2 - 2x = 0$ f) $x^2 - 2x + 1 = 0$

   g) $x^2 - 2x + 3 = 0$ h) $x^2 - 2x - 8 = 0$

Rechnerisches Lösen von linearen Gleichungssystemen

12. Löse die gegebenen Gleichungssysteme!

a) $\begin{aligned} x&=7 \\ x+y&=10 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 6x-4y&=24 \\ x&=y+2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} \frac{x}{2}+\frac{y}{2}&=4 \\ 3(x+y)&=10 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x+3y&=12 \\ 3x-2y&=5 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 2x-3y&=15 \\ 3x\ 22{,}5&=4{,}5y \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 5(x+2)-3(y+1)&=23 \\ 3(x-2)+5(y-1)-19&=0 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} \frac{3}{4}x+\frac{2}{3}y&=13 \\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{2}y&=11 \end{aligned}$

13. Löse die folgenden Gleichungssysteme!
Nutze, dass die linken Seiten der beiden Gleichungen in jedem System übereinstimmen!

a) $\begin{aligned} x&=3y-2 \\ x&=5y-12 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 3y&=2x+9 \\ 3y&=15+4x \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5y-1&=3x \\ 5y-1&=2x \end{aligned}$

14. Löse folgende Gleichungssysteme! Suche einen möglichst rationellen Lösungsweg!

a) $\begin{aligned} x+y&=1 \\ x-y&=3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x-y&=13 \\ 4x-7y&=5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 5x&=3-y \\ -5x&=-16+2y \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 8y&=5x \\ -8y-80&=50x \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} \frac{3}{5}x-\frac{1}{18}y&=4 \\ \frac{2}{5}x+\frac{1}{18}y&=6 \end{aligned}$

15. Hat das Gleichungssystem genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen?

a) $\begin{aligned} 3x-2y&=12 \\ y&=\frac{4}{3}x \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 5y\ 3x&=0 \\ x&=-y+2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 3x-5y&=4 \\ x&=5y+8 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} u&=23-4v \\ u&=3v-12 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} y&=-3x+2 \\ 3x-y&=2 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} -5x+y&=6 \\ y&=5x+4 \end{aligned}$

g) $\begin{aligned} 68r-15s&=23 \\ 17r&=9s-10 \end{aligned}$

h) $\begin{aligned} 4x+2y&=6 \\ y+2x&=3 \end{aligned}$

16. Bestimme die Lösungsmenge!

a) $\begin{aligned} 2x+5y&=23 \\ 2x-3y&=-1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} -5x+6y&=16 \\ 5x-y&=14 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 4x-5y&=37 \\ 4x+y&=7 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 4x+3y&=11 \\ 3x+3y&=9 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} -5x+8y&=-21 \\ 9x-8y&=25 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} 2{,}5x+1{,}5y&=34 \\ 3{,}5x+1{,}5y&=44 \end{aligned}$

17. Löse folgende Gleichungssysteme!

a) $\begin{aligned} \frac{1}{x+y}&=\frac{2}{3x+1} \\ \frac{1}{2x+1}&=\frac{2}{7y} \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 11(x-y)+12(y-x)&=1 \\ (x-2):y&=1:4 \end{aligned}$

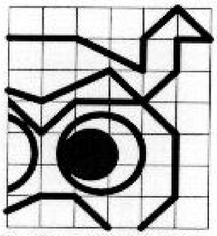
c) $\begin{aligned} 2x+y+z&=1 \\ y+z&=-1 \\ 5z&=5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} x+y+z&=2 \\ 2x+y&=5 \\ 2y+3z&=0 \end{aligned}$

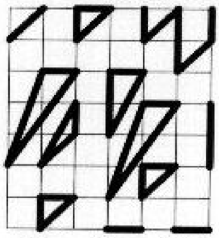
18.

Löse die Geichungssysteme unter den 12 Puzzleteilen. Deine Lösung verrät Dir, wohin Du das Teil übertragen mußt.

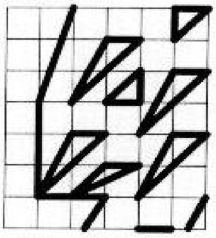
$6y = 9x - 3$
$6y = 18x - 48$



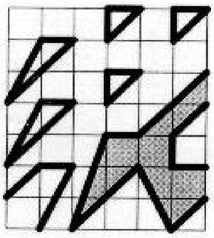
$2(12x-5) - 3(15y+1) = 14y$
$3(5x-7y) - 7(3x-2y) = -25$



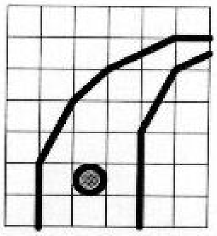
$5y = 2x + 4{,}25$
$5y = -3x - 1$



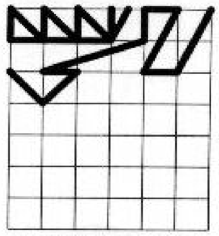
$4 + x = 2y$
$x = -6y - 16$



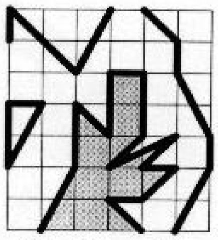
$4x = 5y + 2$
$4x = 3y - 14$



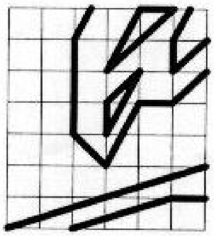
$3(x + 5) - 2(y - 4) = 31$
$5(x + 6) - 3(y + 6) = 26$



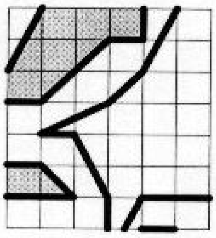
$8x - 2y = -12{,}4$
$2y = 5x + 1$



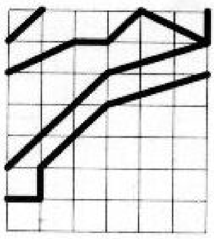
$15x + 7y = 36$
$y = x + 2$



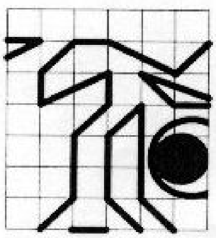
$x + y = 25$
$x - y = 5$



$5x + 6y = 47$
$9x - 12y = 39$



$6x + 7y = 58$
$14x - 11y = 26$



$13y = 5x + 1$
$13y = 9x - 19$

x=4 y=2	x=5 y=2	x=3 y=1
x=5 y=7	x=-1,05 y=0,43	x=1 y=3
x=-7 y=-1,5	x=-9,5 y=-8	x=7 y=2
x=15 y=10	x=5 y=4	x=-3,8 y=-9

Rechnerisches Lösen von quadratischen Gleichungen

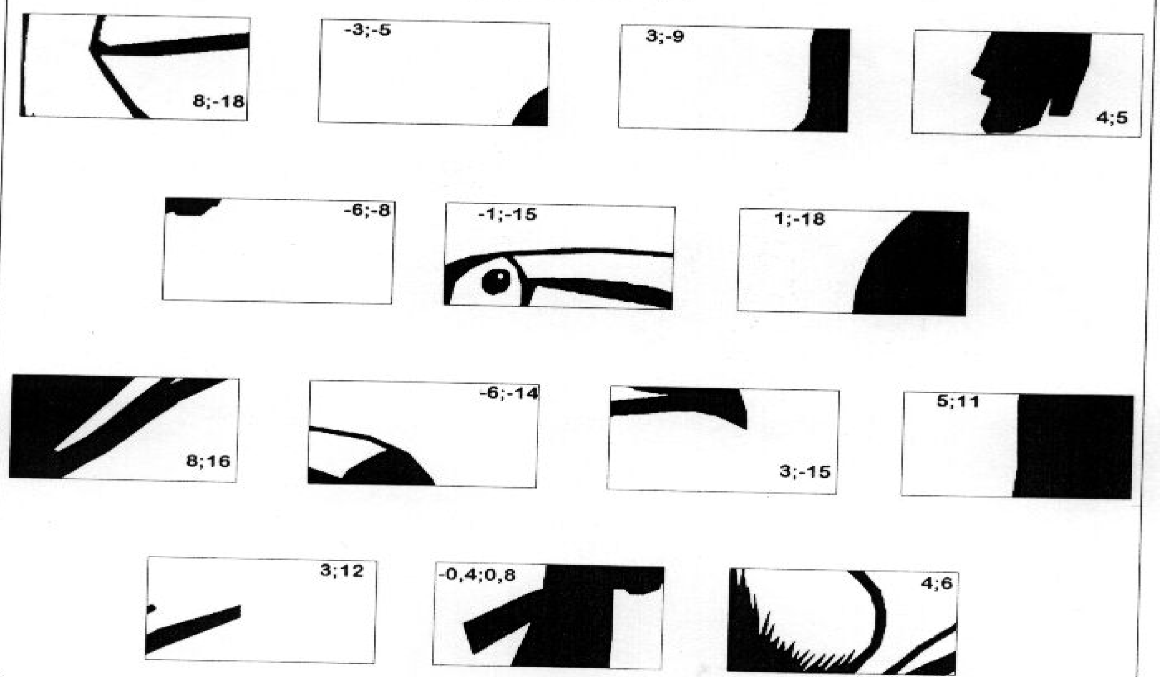
19. Löse die Gleichungen rechnerisch.

a)	$x^2 + 6x - 40 = 0$	b)	$x^2 - 4x - 5 = 0$	c)	$x^2 - 12x + 40 = 0$
d)	$x^2 - 7x - 4 = 0$	e)	$x^2 + 18x - 81 = 0$	f)	$x^2 - 2{,}4x + 0{,}44 = 0$
g)	$2x^2 - 16x + 6 = 0$	h)	$-2x^2 - 14x + 14 = 0$	i)	$4x^2 - 20x + 8 = 0$
j)	$2{,}5x^2 - 15x = 20$	k)	$3{,}6x^2 - 90x = 18$	l)	$0{,}5x^2 - 3{,}5x + 8 = 0$

20.

Löse die gemischt-quadratischen Gleichungen, die in den 14 Feldern stehen. Die Lösung findest Du, wenn Du richtig gerechnet hast, auf einem der Puzzleteile. Klebe dieses Teil an die entsprechende Stelle.

$x^2 + 8x + 15 = 0$	$x^2 + 16x + 15 = 0$	$x^2 + 20x + 84 = 0$
$x^2 + 6x - 27 = 0$	$x^2 + 10x - 144 = 0$	$x^2 + 12x - 45 = 0$
$x^2 + 17x - 18 = 0$	$x^2 - 10x + 24 = 0$	$x^2 - 15x + 36 = 0$
$x^2 - 16x + 55 = 0$	$x^2 - 24x + 128 = 0$	
$x^2 - 0{,}4x - 0{,}32 = 0$	$x^2 + 14x + 48 = 0$	
$x^2 - 9x + 20 = 0$		



4.4 Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben

1. Gib alle Zahlen mit der jeweils geforderten Eigenschaft an!
   a) Die Summe aus der Zahl, ihrem Doppelten und ihrem Dreifachen ist 24.
   b) Das Doppelte und das Dreifache der Zahl ergeben zusammen die Summe aus dieser Zahl und 20.
   c) Addiert man zum Zehnfachen der Zahl das Fünffache der um 1 vergrößerten Zahl, so erhält man 110.
   d) Die Hälfte und ein Drittel der Zahl ergeben zusammen 10.
   e) Vermindert man das Fünffache der Zahl um ihr Sechsfaches, so erhält man die zur betreffenden Zahl entgegengesetzte Zahl.

2. Aus einem 20 cm langen Draht soll ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis a = 8 cm gebogen werden. Wie lang werden die Schenkel?

3. Bei einem Rechteck, das den Umfang 26 cm hat, ist eine Seite 3 cm länger als die andere. Wie lang sind die Seiten dieses Rechteckes?

4. Die Klasse 7 b führt ein Theaterstück auf. Insgesamt nehmen sie 12 € ein. Die 34 anwesenden Kinder bezahlten jeweils 0,25 ct. Erwachsene mussten 0,50 € Eintritt bezahlen. Wie viel Erwachsene waren anwesend?

5. Welche Zahl wird durch Halbieren um 2 größer?

6. Welche Zahl ist gleich dem arithmetischen Mittel aus ihrem Dreifachen und 5?

7. Welche drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen haben die Summe 24?

8. In einem Dreieck mit den Innenwinkeln α, β und γ ist $\beta = 78°$. Der Winkel α ist um 15° größer als das Doppelte von γ. Berechne α und γ.

9. Auf dem Schulhof werden eine 2,40 m hohe Tanne und eine 80 cm hohe Eiche gepflanzt. In den ersten 20 Jahren wächst eine Eiche jährlich etwa 45 cm und eine Tanne etwa 12 cm. Nach wie viel Jahren hat die Eiche die Tanne eingeholt?

10. Aus alten Rechenbüchern:
Jemand wurde gefragt, wie er seine Jahre verlebt habe, worauf er antwortete:
$\frac{1}{6}$ meines Alters verlebte ich in der Kindheit, $\frac{1}{4}$ als Jüngling, $\frac{1}{2}$ als Ehemann, und nun lebe ich schon seit 5 Jahren ohne Frau. Wie alt war die Person?

11. Arithmetische Unterhaltung eines Vaters mit seinem Sohne. Ein Vater, der 51 $\frac{1}{2}$ Jahr alt ist, fragt seinen Sohn, der 19 $\frac{3}{4}$ Jahr alt ist:
„Wie viel Jahre müssen verfließen, bis ich sagen kann, ich bin noch einmal so alt, als du?“

12. Ein Becher Joghurt kostet 0,60 €. Dabei ist der Inhalt 0,50 € teurer als die Verpackung. Wie viel kostet der Inhalt, und wie viel kostet die Verpackung?

13. Eine Aufgabe von Adam Ries:
Ein Sohn fragt seinen Vater, wie alt er sei. Der Vater antwortet: „Wenn du wärest auch so alt wie ich und halb so alt und ein viertel so alt und ein Jahr dazu, so wärest du 134 Jahre alt.“ Wie alt ist der Vater?

14. Ein Schüler sagt: „In 10 Jahren werde ich doppelt so alt sein, wie ich vor zwei Jahren war.“
Wie alt ist der Schüler?

15. Martin erzählt seinen Eltern, dass er in diesem Schuljahr in Mathematik 5 Einsen, 8 Zweien und keine Zensur schlechter als 3 bekommen hat. Sein Zensurendurchschnitt in diesem Fach ist 1,8. Wie viel Dreien erhielt Martin?

16. In einem Copy-Club kostet eine Kopie im Format A 4 für Mitglieder 0,03 € und für Nichtmitglieder 0,05 €. Die monatliche Clubgebühr beträgt 5,00 €. Ab wie viel Kopien im Monat lohnt sich die Mitgliedschaft im Club?

17. Vati will nicht verraten, wie viel Fahrstunden er bis zum Erwerb seines Führerscheins gebraucht hat. Er erzählt aber: „Ich konnte damals zwischen zwei Fahrschulen wählen. In der einen Fahrschule betrug die Grundgebühr 190,- DM und jede Fahrstunde kostete 37,50 DM. Die andere Fahrschule verlangte 265,- DM Grundgebühr, bot die Fahrstunde jedoch für 36,- DM an. Für mich war die zweite Fahrschule günstiger.“
Wie viele Fahrstunden brauchte Vati mindestens bis zur Prüfung?

18. In einem Schwimmbad wird Schülern für 7,50 € ein „Sommerpass“ angeboten. Mit ihm kostet einen Sommer lang der Eintritt nur noch jeweils 1,00 €. Der volle Eintrittspreis beträgt 1,75 €. Untersuche, wann sich ein Sommerpass lohnt?

19. Kurt hat einige Flaschen Limonade zu je 0,50 € und einige Flaschen Cola zu je 0,75 € gekauft. Insgesamt hat er 6,00 € bezahlt. Wie viel Flaschen von jeder Sorte könnten es gewesen sein?

20. Gib alle Möglichkeiten an, 500 € in 50 €-Scheinen und 20 €-Scheinen auszuzahlen!

21. Ein Rechteck hat einen Umfang von 40 cm. Wie lang sind seine Seiten? (3 Möglichkeiten)

22. Ralf und Jim graben zusammen 100 m² Gartenfläche um. Wie viel Quadratmeter könnte jeder der beiden Jungen umgegraben haben? Gib mindestens 3 Möglichkeiten an.

23. Beschreibe die folgende Situation durch eine Gleichung mit zwei Variablen!
    a) Sven kauft Vierkornbrötchen zu 0,30 € und Splitterbrötchen zu 0,20 €. Er bezahlt insgesamt 2,40 €.
    b) Judith kauft Theaterkarten für insgesamt 91,00 €. Sie erhält Karten im Parkett zu 26,00 € und Karten im Rang zu 13,00 €.
    c) Zur Disco im „Turm“ kamen 26 Mädchen mehr als Jungen.

24. Der Umfang eines Rechtecks betrage 120 m, sein Flächeninhalt 836 m². Wie lang sind seine Seiten?

25. Gegeben ist ein Quadrat. Verlängert man die eine Seite des Quadrats um 1,6 cm und verkürzt die andere Seite um 2,4 cm, so entsteht ein Rechteck mit einem Flächeninhalt von 32 cm². Wie lang sind die Seiten des Quadrats?

26. Herr Meyer kauft jeden Tag Brötchen. Gestern kaufte er 6 Weizenbrötchen und 2 Roggenbrötchen und zahlte dafür 2,50 €. Heute zahlt er für 4 Weizenbrötchen und 4 Roggenbrötchen zusammen 2,60 €. Wie teuer ist ein Weizenbrötchen, wie teuer ein Roggenbrötchen?

27. Ein Frachter hat 14 Container geladen, und zwar Container zu je 10 t und zu je 12 t. Das Ladegewicht des Frachters beträgt 148 t. Wie viele Container jeder Sorte sind geladen?

28. Ein Vater und ein Sohn sind zusammen 70 Jahre alt. Vor 5 Jahren war der Vater dreimal so alt wie der Sohn. Wie alt ist jeder?

29. Die Summe zweier Zahlen ist 12, die Differenz beider Zahlen ist 3. Wie heißen die Zahlen?

30. Eine alte chinesische Aufgabe:
    In einem Käfig befinden sich insgesamt 35 Hühner und Kaninchen. Zusammen haben sie 94 Beine. Wie viele Kaninchen, wie viele Hühner sind im Käfig?

31. Frau Witt hatte im Juli für 426 kWh eine Stromrechnung von 99,66 €; im Mai 104,78 € für 458 kWh. Wie hoch sind Arbeitspreis (kWh-Preis) und Grundgebühr?

32. Eine CD ist um 5 € teurer als eine MC. Beide zusammen kosten 17 €. Wie viel kostet eine CD und wie viel eine MC?

33. Subtrahiert man von einer Zahl 14 und addiert zu einer zweiten Zahl 14, so sind die Zahlen gleich. Man erhält auch gleiche Zahlen, wenn man von der ersten Zahl 25 und von 19 die zweite Zahl subtrahiert. Wie heißen die beiden Zahlen ?

34. Aus „So rechneten Griechen und Römer“
    Ein reicher Athener ließ zu einem Gastmahl 13 Ochsen und 41 Schafe im Gesamtwert von 159 Drachmen schlachten. Ein Ochse kostete um 6 Drachmen mehr als ein Schaf. Wie viel Drachmen bezahlte er für ein Schaf?

5 Methodische Aspekte des Einsatzes von Aufgaben

5.1 Zur Befähigung zum Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben

Zur Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts gehört es u. E. auch, **Fähigkeiten zur Textanalyse** und **Fähigkeiten zur Entwicklung eigener Lösungsstrategien** sowie die **Akzeptanz verschiedener Lösungswege** der Schülerinnen und Schüler beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben zu fördern.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist das systematische Vermitteln von Methodenkompetenz wichtig.
Dabei haben sich u. E. entsprechende Schrittfolgen auf Arbeitsblättern oder allgemeine Handlungsorientierungen bewährt (s. dazu die Vorschläge im Arbeitsmaterial „Basiswissen Prozentrechnung“ bzw. „Basiswissen Planimetrie“).
Die Ausführungen in diesen Materialien sind prinzipiell auch anwendbar beim Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben mit Hilfe von Gleichungen und sollen daher hier nicht wiederholt werden.

Viel mehr soll im folgenden auf Grund unserer Erfahrungen zusammengefasst dargestellt werden, worauf u.E. in der Unterrichtspraxis besonders geachtet werden sollte.
Es handelt sich zum Teil um „schlichte“ Feststellungen, gegen die aber nach unserer Wahrnehmung oft verstoßen wird. Wir halten es daher für notwendig und berechtigt, diese hervorzuheben.

(1) Schülerinnen und Schüler können nur dann lernen, selbstständig Sach- und Anwendungsaufgaben zu lösen, wenn sie bereits im Unterricht alle Phasen des Lösens dieser Aufgaben selbstständig bearbeiten dürfen und Hilfen (Impulse) nur sehr dosiert gegeben werden. Die Impulse müssen nicht allein vom Lehrer kommen, sondern sollten viel mehr von Mitschülern kommen.
Es bringt keinen echten Lernfortschritt, wenn die Schülerinnen und Schüler lediglich mit fertigen Lösungen und Ergebnissen „vollgestopft“ werden; auch das Behandeln von Anwendungsaufgaben im Unterricht nach dem Schema „Aufstellen des Ansatzes im Unterrichtsgespräch“ und „Selbstständige Schülerarbeit beim Lösen der erhaltenen formalen Aufgabe“ führt insbesondere bei den Schülern, die Schwierigkeiten haben, zu keinem oder nur zu einem geringen Lernzuwachs.

(2) Größter Wert ist darauf zu legen, dass die Schülerinnen und Schüler den Sachverhalt erfassen. Das beginnt mit dem inhaltlichen Erschließen und Verstehen des Aufgabentextes.
Das wiederholte Lesen, auch „lautes Vorlesen“ und das Wiedergeben des Inhaltes mit „eigenen Worten“ gehört ebenso dazu wie das Feststellen von eventuellen Unklarheiten;
es ist u. E. ein wichtiges Merkmal einer guten Unterrichtskultur, dass Fragen zu unverstandenen Begriffen („Worten“) gestellt werden.
Mit der Realisierung dieser Zielstellung entwickelt man gleichzeitig einen Bezug zur Praxis und unterstützt die Fähigkeit zur Erfassung von Lehrtexten, die sowohl für das Fach Mathematik als auch für andere Fächer von größter Bedeutung ist.
Hier spielt die Lesekompetenz eine große Rolle. Texte, Abbildungen und Diagramme müssen verstanden werden. Hilfen für die Schüler sind dabei Nachschlagewerke, Gespräche mit Schülern bzw. Impulse vom Lehrer. Wichtig dabei ist, dass es keine Kluft zwischen Lehrersprache und Schülersprache gibt.

(3) Nach dem inhaltlichem Erfassen des Textes kommt es darauf an, die gegebenen und gesuchten Daten in „geeigneter“ Weise zusammenzustellen, also ggf. eine Tabelle aufstellen, Symbole oder Variablen einführen und damit die Daten ordnen (strukturieren).

(4) Nicht immer muss die Aufstellung eines mathematischen Modells zu einer Gleichung, Ungleichung oder zu einem Gleichungssystem führen (siehe Abschnitt 5.2).
Im Sinne der Methodenreflexion ist es gerade hier angebracht, nicht nur *einen* Lösungsweg zu betrachten.

(5) Das „Übersetzen“ von (umgangs-) sprachlichen Formulierungen in die mathematische Fachsprache muss geübt werden, z. B. „vermehrt um ...", „das Dreifache von ...“.
Empirische Untersuchungen belegen, dass Schüler diese „Übersetzungshandlungen“ unzureichend beherrschen.
Beispiel (aus /2/, 675 und 682):

> Aufgabe:
> *In einer Schule sind Lehrer (x) und Schüler (y). Auf einen Lehrer kommen 10 Schüler. Schreibe eine Gleichung hierzu auf.*
> Nur 26 % von 224 Schülerinnen und Schülern aus Gymnasien bzw. 17 % von 210 Schülerinnen und Schülern aus Realschulen haben diese Anforderung korrekt bewältigt. Dabei war bereits eine Teilforderung mit gegeben, nämlich das Einführen von Variablen.

(6) Die Resultate aus der Arbeit innerhalb des mathematischen Modells müssen interpretiert werden.
Durch diese Interpretation erhält man erst ein Ergebnis der Sach- und Anwendungsaufgabe, das am Aufgabentext zu überprüfen ist.
Den Schülern muss klar werden, dass die Lösung aus dem mathematischen Modell nicht immer der Lösung der Sachaufgabe entspricht. (Zum Beispiel, wenn man ermitteln will, wie oft ein Lkw fahren muss, um eine bestimmte Menge zu transportieren.)

(7) Durch sinnvoll aufeinander abgestimmte Sach- und Anwendungsaufgaben soll die Fähigkeit der Schüler entwickelt werden, solche Aufgaben lösen zu können.
Es kommt nicht in erster Linie auf die Quantität an, sondern es ist vielmehr die Prozessqualität beim Behandeln von Sach- und Anwendungsaufgaben entscheidend.

5.2 Eine Aufgabe und verschiedene Lösungswege

Das Behandeln von Sach- und Anwendungsaufgaben im Zusammenhang mit Gleichungen oder Gleichungssystemen führt häufig zur Situation, dass gezielt solche Sachaufgaben gestellt werden, die das Aufstellen des gerade behandelten Typs von Gleichungen erlauben, die also auf ein ganz bestimmtes mathematisches Modell zielen.
So ist es gar nicht selten, dass Lehrerinnen und Lehrer andere Lösungswege, die keine Gleichungen verwenden, sogar als unexakt ablehnen.
Dies läuft natürlich generellen Zielsetzungen des Befähigens der Schüler zum Problemlösen zuwider (und dazu gehört mit Sicherheit das Lösen von Sach- und Anwendungsaufgaben).
Daher sollte man grundsätzlich verschiedene Lösungswege zulassen und nach Möglichkeit im Unterricht auch diskutieren.

Am Beispiel einer Aufgabe, die in der TIMS-Studie gestellt wurde, soll dies dargestellt werden (diese Aufgabe haben wir auch im Test – s. Abschnitt 6 – aufgenommen).

Aufgabe: (© IEA-TIMSS 1994, TIMSS-Deutschland) – aus: /1/, S. 31
Eine Klasse hat 28 Kinder. Das Verhältnis von Mädchen zu Jungen ist 4:3.
Wie viele Mädchen sind in der Klasse?

Lösungsweg 1:
Die Anzahl der Mädchen sei x.
Die Anzahl der Jungen sei y.
Damit gilt: $x + y = 28$ und $x : y = 4 : 3$.

Es ist ein Gleichungssystem entstanden. Die Lösung desselben mit Einsetzen von $x = \frac{4}{3}y$ in die 1. Gleichung führt zu $\frac{7}{3}y = 28$, also y = 12 .

In der Klasse sind 16 Mädchen und 12 Jungen.

Lösungsweg 2

Wenn das Verhältnis (der Anzahl) von Mädchen und Jungen 4:3 ist, dann kann man also die Klasse in insgesamt 7 Teile zu je 4 Schülern „zerlegen“.

Vier Teile umfassen die Mädchen, also 16 Schülerinnen, und drei Teile die Jungen, also 12 Schüler. Das sind zusammen, wie gefordert, 28 Kinder.

Lösungsweg 3

Wenn das Verhältnis 1:1 wäre, dann gäbe es 14 Mädchen und 14 Jungen in der Klasse.

Da das Verhältnis der Anzahl der Mädchen zu Jungen 4:3 ist, gibt es mehr Mädchen als Jungen, aber höchstens 27.

Das Verhältnis 4:3 wird unter diesen Bedingungen nur bei 16:12 erreicht.

In der Klasse sind also 16 Mädchen und 12 Jungen.

Es gibt gewiss weitere Denk- und Lösungsmöglichkeiten.

Nach der Behandlung von linearen Gleichungssystemen streben Lehrer im Unterricht im Allgemeinen den Lösungsweg 1 an. Wenn Schüler nicht gelenkt werden, kommen sie nach unseren Erfahrungen zumeist auf einen Lösungsweg, der keine Gleichungen, ja oft auch gar keine Variablen verwendet, also eher auf die Lösungswege 2 und 3.

Wenn man spezielle Fähigkeiten wie z. B. das Aufstellen von Gleichungssystemen aus einem Sachverhalt schulen oder überprüfen möchte, dann muss eben die Aufgabe anders gestellt werden, z. B.:

> *Eine Klasse hat 28 Kinder. Das Verhältnis von Mädchen zu Jungen ist 4:3.*
> *Stelle diesen Sachverhalt mit Hilfe von Gleichungen dar.*

Im Zusammenhang mit den Lösungswegen 2 und 3 tritt die Frage nach der Lösungsdarstellung auf. Diese müssen in jedem Fall der üblichen Forderung genügen, dass der Lösungsweg erkennbar, nachvollziehbar und vollständig ist.

Darstellungen wie weiter oben dürften wohl erst nach längerer Übung erreicht werden.

5.3 Aufgabenvielfalt in täglichen Kurzübungen

Im zusammenfassenden Bericht zum Modul 4 „Erfahrungen und Befunde“ wurde ein Handlungskonzept für die Gestaltung von täglichen Kurzübungen auf Grund der gesammelten Erfahrungen entwickelt. Es umfasst folgende Bereiche:

(1) Langfristige Planung
(2) Vorinformation der Schüler
(3) Auswahl von Aufgaben und Erstellen von Serien für Kurzübungen
(4) Effektive Gestaltung
(5) Leistungsstand und Übungsbedarf der Schüler ermitteln.

Hier soll speziell auf den Punkt (3) mit Blick auf Aufgabenvielfalt bei der Sicherung von Basiswissen zum Themenkomplex „Gleichungen“ eingegangen werden.

Die täglichen Kurzübungen sollten nicht nur das Lösen von Standardaufgaben umfassen, sondern es sollten auch bewusst immer Aufgaben auftreten, die

a) inhaltliche Aspekte betonen,
b) bei gleicher stofflicher Substanz in Inhalt und Form variieren.

Beispiele zu a)

- Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch? Begründe!
  (a) $2x>3$ wird durch $x=1.5$ erfüllt.
  (b) Es gibt eine Gleichung, die die Lösung 5 hat.
  (c) Es gibt keine Gleichung, die die Lösung 1 hat.
  (d) Es gibt eine Gleichung, die unendlich viele Lösungen hat.
  (e) Es gibt eine Gleichung, die keine Lösung hat.

- Ermittle die Lösungen durch Überlegen ($x \in R$).

  a) $x^2 - 4 = 0$ b) $|x| = 4$ c) $4^x = \frac{1}{64}$ d) $x(x-4)(x+4) = 0$

- Gib eine Gleichung an, die

  a) die Lösung 4 hat. b) die Lösungen - 4 und 4 hat.

  c) die keine Lösung hat.

Beispiele zu b)

- Löse die Gleichung $3x + 4 = 2x – 7$.
- Begründe, dass die Zahl -11 Lösung der Gleichung $3x + 4 = 2x – 7$ ist.
- Untersuche, ob die Zahl -10 Lösung der Gleichung $3x + 4 = 2x – 7$ ist.
- Überprüfe und beurteile folgende Lösung:

$$3x + 4 = 2x - 7 \quad | -3x$$
$$4 = x - 7 \quad | +7$$
$$\underline{\underline{11 = x}}$$

- Gib eine zur Gleichung $3x + 4 = 2x – 7$ äquivalente Gleichung an.
- Gib eine Gleichung an, die die gleiche Lösung wie die Gleichung $3x + 4 = 2x – 7$ hat.
- Eine Gleichung hat die Lösung $- 11$ und als linke Seite den Term $3x + 4$. Gib zwei verschiedene rechte Seiten dazu an.

6 Kontrollaufgaben

Die Kontrollaufgaben sind im folgenden zu einem Test zusammen gefasst dargestellt, der für den Einsatz am Ende der 9. Jahrgangsstufe konzipiert wurde (Arbeitszeit ca. 40 min, ohne Benutzung des Tafelwerkes).
Der Test zielt auf grundlegendes Wissen und Können, darin eingeschlossen die Fähigkeit, Gleichungen inhaltlich lösen zu können (s. Aufgaben 1 und 8).
Die Aufgaben 6 und 7 stammen aus der TIMS-Studie (s. /1 /, S. 31 f.).

1. Ermitteln Sie alle Lösungen folgender Gleichungen ($x \in R$).

   a) $|x-2|=1$ __________________________________

   b) $(x-2)(x+1)=0$ __________________________________

   c) $0=81-3^{x}$ __________________________________

2. Gegeben ist die Formel $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$. Stellen Sie die Formel nach r um.

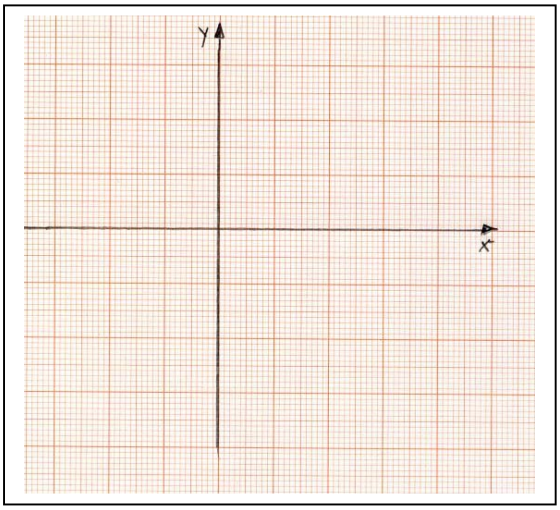
3. Lösen Sie die quadratische Gleichung $0 = x^2 - 8x - 9$.

4. Ermitteln Sie die Lösung des Gleichungssystems rechnerisch und grafisch.

$$\begin{aligned} x - y &= 4 \\ \underline{x + 2y} &\underline{= 1} \end{aligned}$$

   a) rechnerisch

   b) grafisch



5. Eine Klasse führte ein Theaterstück auf. Kinder bezahlten jeweils 0,50 € und Erwachsene 1,00 € Eintritt. Es waren 34 Kinder anwesend und es wurden insgesamt 48 € eingenommen. Wie viel Erwachsene waren anwesend?

6. Jonas hat fünf Hüte weniger als Maria, und Clarissa hat dreimal so viel Hüte wie Jonas. Welche der folgenden Ausdrücke steht für die Anzahl von Clarissas Hüten, wenn Maria n Hüte hat?

Zutreffendes bitte unterstreichen!

A: $5 - 3n$ B: $3n$ C: $n – 5$ D: $3n – 5$ E: $3(n – 5)$

7. Eine Klasse hat 28 Schülerinnen und Schüler. Das Verhältnis von Mädchen zu Jungen ist 4 : 3. Wie viele Mädchen sind in der Klasse?

8. Eine Potenz, deren Basis und Exponent gleich sind, ist gleich 50.
Ermitteln Sie die Basis auf Hundertstel genau.

Literaturverzeichnis

/1/ TIMSS und der Mathematikunterricht – Informationen, Analysen, Konsequenzen
Hrsg.: W. Blum und M. Neubrand, Schroedel Verlag, Hannover 1998

/2/ Franke, M.: Wynands, A.: Zum Verständnis von Variablen – Testergebnisse in 9. Klassen Deutschlands. In: Mathematik in der Schule. Berlin 29(1991)10, S. 674-691

/3/ Flade, L.: Pruzina, M.: Wer übt, kommt weiter! Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin 1991

/4/ Flade, L.: Pruzina, M.: Fit in Mathe – Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin 1992

/5/ Lehrbuch Mathematik 7 – entdecken – verstehen – anwenden
Hrsg.: Bock; Walsch, Oldenbourg Verlag, München 1993 (ISBN 3-486-13007-2)

/6/ Lehrbuch Mathematik 8 – entdecken – verstehen – anwenden
Hrsg.: Bock; Walsch, Oldenbourg Verlag, München 1994

/7/ Lehrbuch Mathematik 9, Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin 1991

/8/ Lehrbuch Mathematik 9, Gymnasium
Hrsg.: Schulz; Stoye, Volk und Wissen Verlag GmbH, Berlin 1995

/9/ Lehrbuch Mathematik heute, Differenzierte Ausgabe 8
Hrsg.: Griesel; Postel, Schrödel Schulbuchverlag, Verlag Ferdinand Schöningh, Hannover 1991

/10/ Lehrbuch Mathematik heute, Erweiterungskurs, Differenzierte Ausgabe 9
Hrsg.: Griesel; Postel, Schrödel Schulbuchverlag, Verlag Ferdinand Schöningh, Hannover 1991

/11/ Hans-J. Schmidt: Dr. F. Üxlein`s Mathematische Rätsel und Knobelaufgaben, Aulis Verlag Deubner & Co KG, Köln 1997

Quellenangaben

Dieses Material entstand in einem Diskussionsprozess, an dem alle Arbeitsgruppenmitglieder beteiligt waren. Die Aufgaben wurden zusammengetragen auf Grund der Erfahrungen; Ursprünge und Quellen lassen sich daher in der Regel nicht mehr genau lokalisieren. Zahlreiche Aufgaben können wohl auch als Allgemeingut angesehen werden.

Im folgenden werden von solchen Aufgaben die Quellen angegeben, bei denen diese Annahme „Allgemeingut“ u. E. nicht zutrifft.

Seite	**Aufgabe**	**Quellenangabe**
13	4	/3/ S. 56 Nr. 5
21	21 a	/11/ S. 104
22	21 b	/11/ S. 94
24	4, 6, 7	/8/ S. 65 Nr. 5, 9, 10
25	10	/10/ S. 165 Nr. 4
28	18	/11/ S. 98
29	20	/11/ S. 108
30	9, 10	/5/ S. 90 Nr. 2; S. 91 Nr. 8
31	12, 13, 14	/6/ S. 40 Nr. 1, 2, 3
31	15	/6/ S.41 Nr. 11