Niveaubestimmende Aufgabe zum Fachlehrplan Mathematik Gymnasium

„Moderne Architektur“

(Schuljahrgänge 7/8)

(Arbeitsstand: 04.07.2016)

Niveaubestimmende Aufgaben sind Bestandteil des Lehrplankonzeptes für das Gymnasium und das Fachgymnasium. Die nachfolgende Aufgabe soll Grundlage unterrichtlicher Erprobung sein. Rückmeldungen, Hinweise, Anregungen und Vorschläge zur Weiterentwicklung der Aufgabe senden Sie bitte über die Eingabemaske (Bildungsserver) oder direkt an petra.behling@lisa.mb.sachsen-anhalt.de

An der Erarbeitung der niveaubestimmenden Aufgabe haben mitgewirkt:

Petra Behling	Halle (Leitung der Fachgruppe)
Thomas Brill	Schulpforte
Uta Fliegner-Hoppstock	Osterburg
Antje Noack	Halberstadt
Udo Piper	Wittenberg

Herausgeber im Auftrag des Ministeriums für Bildung des Landes Sachsen-Anhalt:
Landesinstitut für Schulqualität und Lehrerbildung
Sachsen-Anhalt
Riebeckplatz 09
06110 Halle

Aufgabe „Moderne Architektur“

Der Louvre, ein Palast, in dem bis 1682 Könige residierten, wurde nach der französischen Revolution 1783 zum Zentralmuseum für Kunst in Frankreich und ist heute eines der größten Museen der Welt.
Seit 1989 dient eine gläserne Pyramide (Louvre-Pyramide) als Haupteingang. Diese Pyramide wurde aus 70 Scheiben in Form gleichschenkliger, zueinander kongruenter Dreiecke (Dreiecksscheiben) und 603 Scheiben in Form zueinander kongruenter Vierecke (Vierecksscheiben) errichtet. Jede der Scheiben ist 20 Millimeter dick.

Die Louvre-Pyramide kann durch eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche und einer Höhe von etwa 22 Meter beschrieben werden. Eine Grundkante der Louvre-Pyramide ist etwa 35 Meter lang. Entlang einer Grundkante sind 18 Dreiecksscheiben nebeneinander angeordnet.
Jede der Dreiecksscheiben hat eine Grundfläche mit einem Flächeninhalt von 1,6 m^2.

a) Zeichne ein Schrägbild und ein Zweitafelbild der Louvre-Pyramide in einem geeigneten Maßstab.
Berechne die Größe der Grundfläche der Louvre-Pyramide.

b) Begründe, dass jede Dreiecksscheibe ein Prisma darstellt.
Die Grundfläche einer Vierecksscheibe ist doppelt so groß wie die einer Dreiecksscheibe. Sie entsteht durch Spiegelung der Grundfläche einer Dreiecksscheibe (also eines gleichschenkligen Dreiecks an seiner Basis).
Weise nach, dass die Form einer Vierecksscheibe rhombisch, aber nicht quadratisch ist und gib den Flächeninhalt der Grundfläche einer Vierecksscheibe an.

c) Berechne die Masse einer Vierecksscheibe.
Ermittle das Verhältnis aus der Masse des Glases und der des Metallgerüstes der Louvre-Pyramide. Die Louvre-Pyramide hat eine Gesamtmasse von 180 Tonnen. Die Dichte des Glases beträgt $2{,}2\,\frac{g}{cm^3}$.

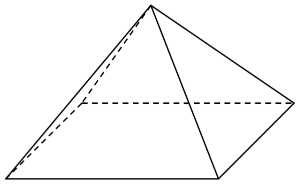
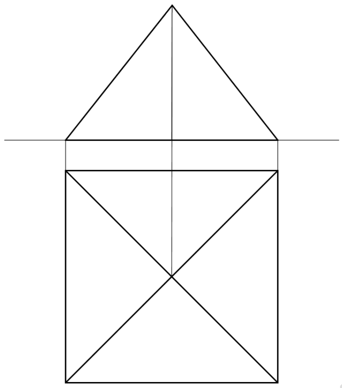
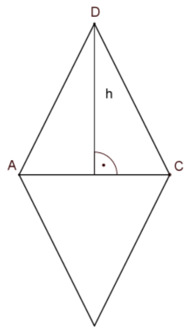
d) Die Louvre-Pyramide wurde entsprechend der Proportionen der Cheops-Pyramide errichtet. Führt man eine zentrische Streckung der Louvre-Pyramide mit dem Streckungsfaktor k aus, so erhält man eine Pyramide, deren Abmessungen näherungsweise denen der Cheops-Pyramide entsprechen. Das Volumen der Cheops-Pyramide beträgt ca. $2579115\,m^3$.
Berechne die Höhe der Cheops-Pyramide.

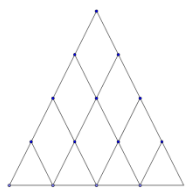
Vor dem Haupteingang befinden sich drei kleine zur Louvre-Pyramide ähnliche Pyramiden. Die kleinen Pyramiden wurden wie die Louvre-Pyramide aus Dreiecks- und Vierecksscheiben errichtet. Jede Seitenfläche der kleinen Pyramide besteht aus vier Dreiecksscheiben, die entlang der Grundkante angeordnet sind, sowie aus sechs darüber liegenden Vierecksscheiben.

e) Skizziere eine Seitenfläche einer kleinen Pyramide.
Berechne die Größe der insgesamt zu reinigenden Glasfläche einer kleinen Pyramide.

f) In den drei kleinen Pyramiden soll der Fußboden neu gefliest werden. Die Fliesen haben die Form eines Rechtecks mit den Abmessungen 30 cm x 60 cm. Diese werden in Kartons mit jeweils acht Fliesen angeliefert. Ermittle die Mindestanzahl zu bestellender Kartons, wenn durch das Zuschneiden Abfall von maximal 10 % der zu verlegenden Fläche entsteht.

Erwarteter Stand der Kompetenzentwicklung

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
a)	Zeichnen, z. B.: Schrägbild und Zweitafelbild mit Maßstab  		x	
	Berechnen, z. B.: Grundfläche der Louvre-Pyramide: $A_L = (35\ \text{m})^2 = 1\,225\ \text{m}^2$	x		
b)	Begründen, z. B.: Jede Dreiecksscheibe stellt einen Körper dar, der begrenzt wird von - zwei zueinander kongruenten Dreiecken (Grund- und Deckfläche), die in zueinander parallelen Ebenen liegen - drei Parallelogrammflächen (Seitenflächen) Die Höhe des Prismas beträgt 20 mm.		x	
	Nachweisen, z. B.: (1) Ein Viereck entsteht durch die Spiegelung eines gleichschenkligen Dreiecks an seiner Basis. Damit sind alle Seiten des Vierecks gleich lang. (2) Annahme: Das Viereck ABCD ist ein Quadrat mit dem rechten Winkel ADC. Umkehrung des Satzes von Pythagoras prüfen: $\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$ mit $\overline{AC} \approx 1{,}94\ \text{m}$ $\overline{AD}^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \overline{AC}\right)^2$ mit $h \approx 1{,}65\ \text{m}$ und $\overline{AD} \approx 1{,}91\text{m}$ $3{,}76\ \text{m}^2 \neq 7{,}30\ \text{m}^2$  Die Umkehrung des Satzes von Pythagoras führt zu einer falschen Aussage, d. h. der Winkel ADC ist kein rechter Winkel. Aus (1) und (2) folgt, dass das Viereck ABCD ein Rhombus, aber kein Quadrat ist.			x
	Angeben, z. B.: $A = 3{,}2\ \text{m}^2$	x		

Aufg.	Hinweise zur Lösung	AFB I	AFB II	AFB III
c)	Berechnen, z. B.: $V_{\text{Vierecksscheibe}} = 3{,}2\ \text{m}^2 \cdot 0{,}02\ \text{m} = 0{,}064\ \text{m}^3$ $m_{\text{Vierecksscheibe}} = 2{,}2\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot 0{,}064 \cdot 10^6\ \text{cm}^3 = 140{,}8\ \text{kg}$	x		
	Ermitteln, z. B.: Die Masse des gesamten Glases ergibt sich als Summe aus der Masse der 70 Dreiecksscheiben und der Masse der 603 Vierecksscheiben. $m_{\text{Glas}} = (35 + 603) \cdot 140{,}8\ \text{kg} = 89\,830{,}4\ \text{kg} \approx 90\ \text{t}$ Bei einer Gesamtmasse von 180 t beträgt das Verhältnis aus der Masse des Glases und der Masse des Metallgerüstes etwa 1:1.		x	
d)	Berechnen, z. B.: Volumen der Louvre-Pyramide: $V_L = \frac{1}{3} A_L \cdot 22\ \text{m} \approx 8\,983{,}3\ \text{m}^3$ Volumen der Cheops-Pyramide: $V_C \approx 2579115\ \text{m}^3$ $\frac{V_C}{V_L} = k^3;\ k \approx 6{,}6$ Höhe der Cheops-Pyramide: $22\ \text{m} \cdot 6{,}6 \approx 145\ \text{m}$			x
e)	Skizzieren, z. B.: 	x		
	Berechnen, z. B.: $A_o = 4 \cdot 8 \cdot 3{,}2\ \text{m}^2 = 102{,}4\ \text{m}^2$	x		
f)	Ermitteln, z. B.: Größe einer rechteckigen Fliese: $A_{\text{Fliese}} = 0{,}18\ \text{m}^2$ Grundfläche einer kleinen Pyramide: $A_G = A_L \cdot (\frac{4}{18})^2 \approx 60{,}5\ \text{m}^2$ Fläche, die gefliest werden soll: $A = 3 \cdot A_G \approx 181{,}5\ \text{m}^2$ Fliesenanzahl Z: $Z \approx 1009$ Abfall: 10 % sind etwa 101 Fliesen Es müssen mindestens 1110 Fliesen, also 139 Kartons, gekauft werden, um den Boden der drei kleinen Pyramiden zu erneuern.		x	

Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

In dieser Aufgabe ist durch die Schülerinnen und Schüler ein umfassendes Grundwissen nachzuweisen und im Sachbezug anzuwenden. Es ist ein Vernetzen des Wissens verschiedener Kompetenzschwerpunkte notwendig, sodass deren Einsatz dieser Aufgabe in einem Aufgabenpraktikum zu empfehlen ist. Die Teilaufgaben sind so konzipiert, dass diese teilweise unabhängig voneinander bearbeitet werden können. Dies ermöglicht eine Verwendung der Aufgabe auch außerhalb eines Aufgabenpraktikums. Andererseits kann durch eine gezielte Auswahl von Teilaufgaben mit Blick auf das Leistungsvermögen einzelner Schülerinnen und Schüler im Rahmen eines Aufgabenpraktikums differenziert gearbeitet werden.

Eine empfehlenswerte Form der Unterrichtsorganisation ist das „Think-Pair-Share-Prinzip“. Dadurch wird die Weiterentwicklung mathematischer Kompetenzen zum „Mathematisch argumentieren und kommunizieren“ unterstützt.

Das Zeichnen des Schräg- und Zweitafelbildes erfordert neben motorischen Fähigkeiten auch das Planen und Realisieren der Vorgehensweise.

Der erfolgreiche Nachweis der Vierecksart „Rhombus“ wird sicher davon abhängen, wie häufig die Schülerinnen und Schüler mit derartigen Lernsituationen konfrontiert wurden. Der Nachweis erfordert neben sicher anwendbarem Wissen zu Vierecken und rechtwinkligen Dreiecken auch die Fähigkeit, diesen folgerichtig und vollständig darzustellen.

Neben der Berechnung von Flächeninhalten und Volumina erfordert die Ermittlung des Lösungsansatzes zur Berechnung der Pyramidenhöhe ein sehr gutes räumliches Vorstellungsvermögen.

Die Lösung der Aufgabe f) zeigt, ob die Schülerinnen und Schüler über ihre Ergebnisse im Sachzusammenhang reflektieren oder diese rein innermathematisch betrachten.

Variationsmöglichkeiten

In dieser Aufgabe ergeben sich durch geringfügige Änderungen in den Aufgabenstellungen Variationsmöglichkeiten, die zur Veränderung des kognitiven Anspruchs führen.

a) Gegeben sei ein Zweitafelbild der Pyramide sowie der zur Darstellung verwendete Maßstab. Die Schülerinnen und Schüler ermitteln daraus die Abmessungen der Pyramide.

b) Variation 1
Weise die Gültigkeit der folgenden Aussagen nach.
(I) Ein Viereck, das die Form der viereckigen Fenster beschreibt, hat vier gleich lange Seiten.
(II) Ein derartiges Viereck verfügt über keinen rechten Innenwinkel.

Schlussfolgere aus (I) und (II) auf die Art des Vierecks, das die Form der Fensterscheiben beschreibt.

Variation 2
Zunächst ist zu begründen, dass ein Viereck, das die Form der viereckigen Fenster beschreibt, vier gleich lange Seiten hat.
Außerdem ist der symbolsprachliche Teil des Nachweises, dass keine Rechtwinkligkeit vorliegt, gegeben und zu kommentieren.
Auf die Art des Vierecks ist zu schlussfolgern.

d) Das Bild einer kleinen Pyramide sowie deren Höhe werden gegeben. Die Schülerinnen und Schüler entnehmen aus dem Bild die für die Oberflächen- und Volumenberechnung erforderlichen Angaben.

e) Variation 1
Die Schülerinnen und Schüler müssen bei vorgegebener Fliesenabmessung selbstständig einen Fliesenplan erstellen, um daraus den Anteil für den anfallenden Abfall durch das Zuschneiden zu ermitteln.

Variation 2
Es werden die Abmessungen für zwei verschiedene Fliesengrößen und deren Quadratmeterpreise gegeben. Die Schülerinnen und Schüler sollen anhand der zu erstellenden Fliesenpläne und des anfallenden Abfalls die kostengünstigere Variante ermitteln.

Aufgabe „Moderne Architektur“

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgänge
Lernaufgabe	WTR	60 min	7/8

Einordnung in den Fachlehrplan

<u>Kompetenzschwerpunkte</u>

Körperdarstellung
Körperberechnung
Ähnlichkeit
Satzgruppe des Pythagoras
Prozentrechnung
Vierecke

<u>zu entwickelnde mathematische Kompetenzen</u>

- Pyramiden als Schrägbild und als Zweitafelbild darstellen
- Volumen von geraden Prismen berechnen
- Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden berechnen
- maßstäbliche Angaben und Streckenverhältnisse anwenden
- Katheten und Hypotenusen in rechtwinkligen Dreiecken identifizieren
- Dreieckstücke mithilfe der Satzgruppe des Pythagoras berechnen
- Prozentrechnung in Sachbezügen anwenden
- Aussagen über Vierecke durch Zurückführen auf Dreiecke begründen
- inner- und außermathematische Anwendungsaufgaben lösen

<u>Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen</u>

- Begriffe: gerade Prismen und Pyramiden
- Grundfläche, Deckfläche, Seitenflächen, Mantelfläche, Körperhöhe
- Schrägbild
- senkrechte Zweitafelprojektion: Grundriss, Aufriss, Rissachse, Ordnungslinie
- Formeln für Volumen von Prismen
- Formeln für Oberflächeninhalt und Volumen von Pyramiden
- Streckenverhältnis
- zentrische Streckung, Streckungsfaktor k
- Kathete und Hypotenuse
- Satz des Pythagoras
- Prozente im täglichen Leben
- Vierecksarten: Quadrat und Rhombus

Einordnung in das Kompetenzmodell

Aufg.	inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen				allgemeine mathematische Kompetenzen				AFB		
	a²=5m²				P	M	A	D	I	II	III
a		x			1			1,4	x	x	
b		x			2		5		x	x	x
c	x	x			3		1	4	x	x	
d		x			1			2,4			x
e	x	x				3		4	x	x	
f	x	x			1			4		x	