SACHSEN-ANHALT

Ministerium für Bildung

SCHRIFTLICHE ABITURPRÜFUNG 2023

MATHEMATIK
(ERHÖHTES ANFORDERUNGSNIVEAU)

Prüfungsaufgabe
Prüfungsteil 2

Arbeitszeit: 230 Minuten

Es sind die drei Pflichtaufgaben zu bearbeiten.

Pflichtaufgaben

Aufgabe 1: Analysis

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

Aufgabe 3: Stochastik

Name, Vorname: ______________________

Aufgabe 1: Analysis

1.1 | **BE**

Auf einer Autobahn entsteht morgens an einer Baustelle häufig ein Stau, der sich dann wieder vollständig auflöst.

An einem bestimmten Tag entsteht der Stau um 6:00 Uhr und löst sich um 10:00 Uhr vollständig auf. Für diesen Tag kann die momentane Änderungsrate der Staulänge mithilfe der in R definierten Funktion f mit

$f(x) = x \cdot (8-5x) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)^2 = -\frac{5}{16}x^4 + 3x^3 - 9x^2 + 8x$

beschrieben werden.

Dabei gibt x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $f(x)$ die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde an.

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen von f für $0 \le x \le 4$.

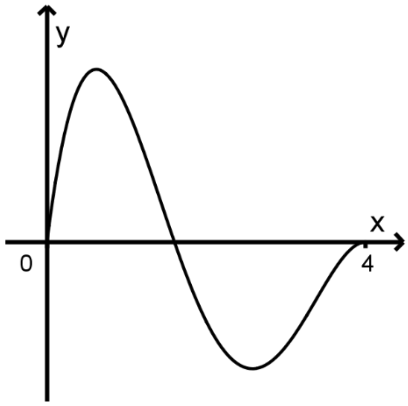


Abbildung 1

Für die erste Ableitungsfunktion von f gilt $f'(x) = \left(5x^2 - 16x + 8\right) \cdot \left(1-\frac{x}{4}\right)$.

a) Nennen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate der Staulänge den Wert null hat, und begründen Sie anhand der Struktur des Funktionsterms von f, dass es keine weiteren solchen Zeitpunkte gibt. — 3

b) Es gilt $f(2) < 0$.
Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an. — 1

c) Bestimmen Sie rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Staulänge am stärksten zunimmt. — 5

d) Geben Sie den Zeitpunkt an, zu dem der Stau am längsten ist.
Begründen Sie Ihre Angabe. — 2

Im Sachzusammenhang ist neben der Funktion f die in R definierte Funktion s mit

$s(x) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \cdot (4-x)^3 = -\frac{1}{16}x^5 + \frac{3}{4}x^4 - 3x^3 + 4x^2$ von Bedeutung.

e) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: — 4

Die Staulänge kann für jeden Zeitpunkt von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch die Funktion s angegeben werden.

Bestätigen Sie rechnerisch, dass sich der Stau um 10:00 Uhr vollständig aufgelöst hat.

f) Berechnen Sie die Zunahme der Staulänge von 06:30 Uhr bis 08:00 Uhr und bestimmen Sie für diesen Zeitraum die durchschnittliche Änderungsrate der Staulänge. — 3

Fortsetzung auf Seite 3

g) Für einen anderen Tag wird die momentane Änderungsrate der Staulänge für den Zeitraum von 06:00 Uhr bis 10:00 Uhr durch den in der Abbildung 2 gezeigten Graphen dargestellt. Dabei ist x die nach 06:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und y die momentane Änderungsrate der Staulänge in Kilometer pro Stunde. 3

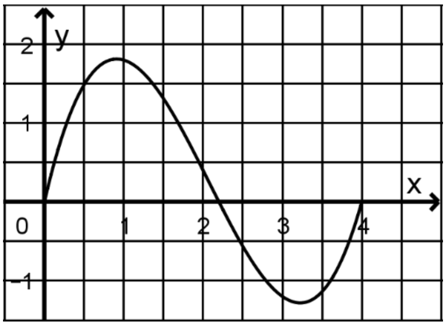


Abbildung 2

Um 07:30 Uhr hat der Stau eine bestimmte Länge. Es gibt einen anderen Zeitpunkt, zu dem der Stau die gleiche Länge hat. Markieren Sie diesen Zeitpunkt in der Abbildung 2, begründen Sie Ihre Markierung und veranschaulichen Sie Ihre Begründung in der Abbildung 2.

1.2

Betrachtet wird die Schar der in R definierten Funktionen h_k mit $h_k(x) = (x-3)^k + 1$ und $k \in N, k \neq 0$.

a) Geben Sie in Abhängigkeit von k das Verhalten von h_k für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe. 3

b) Ermitteln Sie die Koordinaten der beiden Punkte, die alle Graphen der Schar gemeinsam haben. 3

c) Die erste Ableitungsfunktion von h_k wird mit h'_k bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage: 6

Es gibt genau einen Wert von k, für den der Graph von h'_k Tangente an den Graphen von h_k ist.

d) Die Graphen von h_k und h'_k werden in der Abbildung 3 für $k = 4$ beispielhaft für gerade Werte von k gezeigt, in der Abbildung 4 für $k = 5$ beispielhaft für ungerade Werte von k. 7

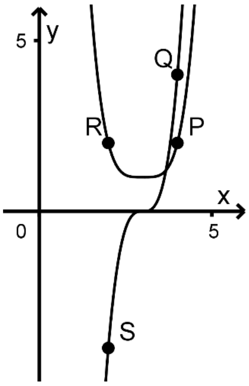


Abbildung 3

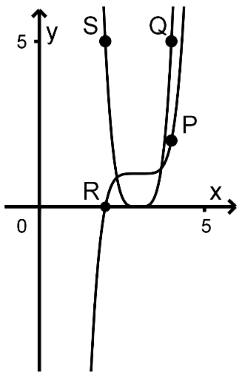


Abbildung 4

Für $k \geq 4$ werden die Punkte $P\left(4 \mid h_k(4)\right)$, $Q\left(4 \mid h'_k(4)\right)$, $R\left(2 \mid h_k(2)\right)$ und $S\left(2 \mid h'_k(2)\right)$ betrachtet. Diese Punkte sind jeweils Eckpunkte eines Vierecks.

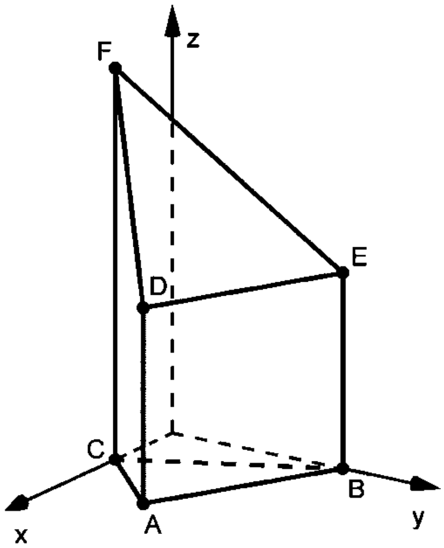
Begründen Sie, dass jedes dieser Vierecke ein Trapez ist, und zeigen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Für jeden geraden Wert von k mit $k \geq 4$ stimmen der Flächeninhalt des Trapezes für k und der Flächeninhalt des Trapezes für $k+1$ überein.

Aufgabe 2: Analytische Geometrie

BE

Die Abbildung zeigt den Körper ABCDEF mit $A(6|3|0)$, $B(0|6|0)$, $C(3|0|0)$, $D(6|3|6)$, $E(0|6|6)$ und $F(3|0|12)$.



a) Die Punkte D, E und F liegen in der Ebene L. Ermitteln Sie eine Gleichung von L in Koordinatenform. 4

[zur Kontrolle: $2x + 4y + 3z - 42 = 0$]

b) Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den L mit der xy-Ebene einschließt. 3

c) Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC kann mit dem Term $6 \cdot 6 - \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6$ berechnet werden. Veranschaulichen Sie diese Tatsache durch geeignete Eintragungen in der Abbildung. 3

d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers ABCDEF. 3

e) Die Ebene N_k enthält die z-Achse und den Punkt $P_k(1-k|k|0)$ mit $k \in R$ und $0 < k < 1$. Welche Kanten des Körpers von N_k geschnitten werden, ist abhängig von k. Durchläuft k alle Werte zwischen 0 und 1, so gibt es Bereiche $]a;b[$ [1], für die N_k für alle Werte von $k \in]a;b[$ jeweils die gleichen Kanten des Körpers schneidet. 4
Bestimmen Sie den größten dieser Bereiche und geben Sie die zugehörigen Kanten an.

Fortsetzung auf Seite 5

[1] $k \in]a;b[$, wenn $a < k < b$

f) Auf der Kante $\overline{AD}$ liegt der Punkt Q, auf der Kante $\overline{BE}$ der Punkt $R(0|6|2)$. Das Dreieck FQR hat in Q einen rechten Winkel.
Bestimmen Sie die z-Koordinate von Q. 5

g) Der Körper wird so um die Gerade AB gedreht, dass der mit D bezeichnete Eckpunkt nach der Drehung in der xy-Ebene liegt und dabei eine positive y-Koordinate hat. Die folgenden Rechnungen liefern die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit der beschriebenen Drehung: 3

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0{,}8 \text{ , d. h. } S(4{,}8\,|\,3{,}6\,|\,0)$$

$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OS} + \left|\overrightarrow{CS}\right| \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und geben Sie die Bedeutung von S an.

Aufgabe 3: Stochastik

BE

Ein Unternehmen stellt Olivenöl her und füllt es in Flaschen ab. Laut Aufdruck beträgt die Füllmenge jeder Flasche 600 ml.

3.1

Die Flaschen werden in Kartons verpackt; jeder Karton enthält zwölf Flaschen. Ein Karton gilt als fehlerhaft, wenn mehr als eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält. Für jede Flasche beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie weniger als 600 ml Öl enthält, 1,5 %.

a) Die Rechnung $0{,}985^{12} \approx 83{,}4\,\%$ stellt im Sachzusammenhang die Lösung einer Aufgabe dar. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie den Ansatz der Rechnung. 3

b) An einen Supermarkt wird regelmäßig die gleiche Anzahl von Flaschen geliefert. Dabei enthalten im Mittel mehr als 780 Flaschen mindestens 600 ml Öl. Ermitteln Sie, wie viele Flaschen mindestens geliefert werden. 3

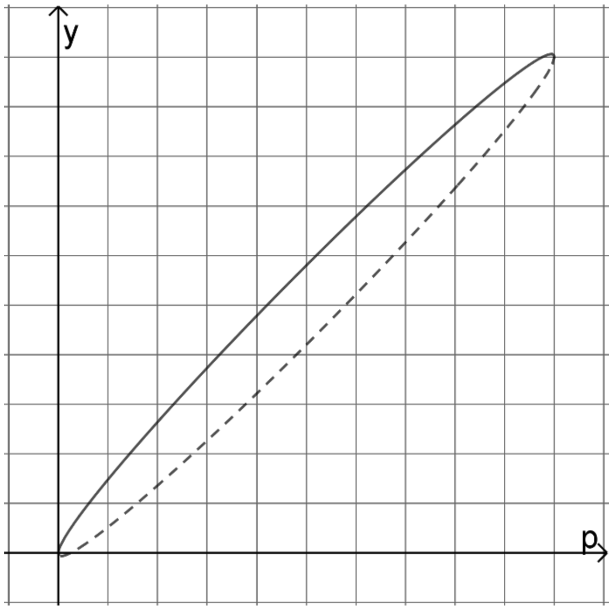
c) Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 150 Kartons. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3 % der Kartons fehlerhaft sind. 4

d) Das Unternehmen gibt den Anteil fehlerhaft etikettierter Kartons mit p_0 an. Ein Abnehmer bezweifelt diese Angabe. Zur Überprüfung der Angabe registriert der Abnehmer in einer Stichprobe vom Umfang n einen Anteil h fehlerhaft etikettierter Kartons. 3

Die Abbildung zeigt für diese Stichprobe die Graphen der für $p \in [0;1]$ definierten Funktionen:

$$f(p) = p + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

$$g(p) = p - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$



Veranschaulichen Sie die folgende wahre Aussage in der Abbildung und erläutern Sie Ihre Veranschaulichung.

Die Überprüfung der Verträglichkeit des Stichprobenergebnisses h mit der Wahrscheinlichkeit p_0 führt sowohl ausgehend von h als auch von p_0 zum gleichen Resultat.

Fortsetzung auf Seite 7

3.2

Die Füllmenge der Flaschen soll als normalverteilt mit einem Erwartungswert von 600,5 ml und einer Standardabweichung von 0,23 ml angenommen werden.

a) Eine Flasche wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit: 3

A: „Die Flasche enthält mehr als 601 ml Öl.“
B: „Die Füllmenge der Flasche weicht höchstens um 0,5 ml vom Erwartungswert ab.“

b) Die Füllmenge einer Flasche ist nie negativ. Die Normalverteilung, die zur Beschreibung der Füllmenge der Flaschen verwendet wird, ist jedoch auch für negative reelle Zahlen definiert und nimmt dabei ausschließlich positive Werte an. Begründen Sie, dass die Verwendung der Normalverteilung dennoch sinnvoll ist. 2

3.3

Im Folgenden werden Ereignisse C und D eines Zufallsversuchs betrachtet.
In der Vierfeldertafel sind zugehörige Wahrscheinlichkeiten angegeben.

	C	$\overline{C}$	
D		0,25	
$\overline{D}$			
		0,70	

a) Bei einem Nachweis wurden folgende Argumentationsschritte in der angegebenen Reihenfolge durchgeführt: 4

(I) $P(\overline{C} \cap \overline{D}) = 0{,}45$

(II) $P(\overline{D}) \geq 0{,}45$

(III) $P(D) \leq 0{,}55$

Erläutern Sie für jeden Argumentationsschritt den zugrundeliegenden Gedankengang und zeigen Sie, dass damit $P(D) < P(\overline{C})$ nachgewiesen wird.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass von den Ereignissen C und D genau eines eintritt, beträgt 0,55.
Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. 3