Ein Aufgabenbeispiel zur Differenzierung zwischen grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau

1. Einordnung in den Fachlehrplan Gymnasium

Kompetenzbereich:	**Zuordnungen und Funktionen**
Kompetenzschwerpunkte:	**Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen; Funktionsklassen; Differentialrechnung, Integralrechnung**

<u>Inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen:</u>

- Einfluss von Parametern auf Lage und Form der Graphen von Funktionen untersuchen und beschreiben
- Ableitungsfunktionen bilden
- Gleichungen von Tangenten ermitteln
- Zusammenhänge zwischen Funktionen und ihren Ableitungen erkennen und begründen
- Graphen von Funktionen auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte untersuchen und darstellen
- das bestimmte Integral als Flächeninhalt deuten

Erhöhtes Anforderungsniveau:

- Funktionsscharen auf Eigenschaften untersuchen

<u>Allgemeine mathematische Kompetenzen:</u>

K1:
- Aussagen inhaltlich-anschaulich oder fachsprachlich begründen, situationsangemessen argumentieren
- Lösungswege beschreiben und begründen
- Aussagen zu mathematischen Inhalten nachvollziehen, erläutern und entwickeln

K2:
- Aufgabentexte inhaltlich erschließen, diese analysieren und aufgabenrelevante Informationen entnehmen
- Lösungsverfahren auswählen und entwickeln sowie alternative Lösungswege angeben

K4:
- Informationen aus grafischen Darstellungen entnehmen und interpretieren sowie Informationen in grafischer Form darstellen
- symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt
- mit unterschiedlichen mathematischen Darstellungsformen (grafisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) arbeiten

K5:
- mit mathematischen Objekten umgehen
- analoge und digitale Hilfsmittel angemessen nutzen

K6:
- mathematische Überlegungen darlegen
- Informationen aus mathematikhaltigen Texten entnehmen, interpretieren und reflektieren

Bezug zu grundlegenden Wissensbeständen:
- Streckung und Stauchung
- Graphen und Eigenschaften, auch Symmetrie zum Koordinatenursprung, Wendepunkte
- Stammfunktion
- lokale und globale Extrema
- notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrem- und Wendestellen
- bestimmtes Integral als orientierter Flächeninhalt

Erhöhtes Anforderungsniveau:
- Funktionsscharen

Didaktische Vorüberlegungen[1]:

Die gemeinsamen Aufgaben des grundlegenden und erhöhten Anforderungsniveaus bestehen in der Erweiterung und Vertiefung der bis zum Eintritt in die Qualifikationsphase erworbenen Kompetenzen mit dem Ziel der Vorbereitung auf die Anforderungen eines Hochschulstudiums oder einer vergleichbaren beruflichen Ausbildung.

Der Unterricht auf grundlegendem Anforderungsniveau vermittelt durch die Einführung in grundlegende Sachverhalte, Problemstrukturen und Zusammenhänge eine wissenschaftspropädeutische Grundbildung. Im erhöhten Anforderungsniveau ist neben der Vermittlung eines größeren Umfangs mathematischer Inhalte auch ein tieferes und komplexeres Verständnis der Begriffe, Theorien und Modelle erforderlich.

Die Anforderungen im grundlegenden Anforderungsniveau unterscheiden sich infolgedessen quantitativ und qualitativ von denen im erhöhten Anforderungsniveau. Es ergeben sich unterschiedliche Anforderungen im Hinblick auf

- die Komplexität und die Variantenvielfalt,
- den Grad der Vorstrukturierung und Abstraktion,
- den Anspruch an die Beherrschung der Fachsprache und der Fachmethoden,
- den Grad der Selbstständigkeit bei der Lösung von Aufgaben,
- die Tiefe und den Grad der Präzision der Argumentation.

In beiden Anforderungsniveaus sind Leistungen zu allen durch die Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife formulierten Anforderungsbereichen zu erbringen. Dabei liegt der Schwerpunkt der zu erbringenden Leistungen im Anforderungsbereich II. Weiterhin sind im grundlegenden Anforderungsniveau die Anforderungsbereiche I und II stärker zu akzentuieren, im erhöhten Anforderungsniveau die Anforderungsbereiche II und III. Dies muss auch der Unterricht widerspiegeln.

1 aus: https://lisa.sachsen-anhalt.de/fileadmin/Bibliothek/Politik_und_Verwaltung/MK/LISA/Unterricht/Lehrplaene/Gym/Anpassung_2022/FLP_Mathe_Gym_010822_swd.pdf

2. Aufgabe

Art der Aufgabe	Hilfsmittel	Arbeitszeit	Schuljahrgänge
Leistungsaufgabe	WTR	90 min	11/12

Grundlegendes Anforderungsniveau	BE

1.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto (x^2-1)\cdot(x^2-3)$. Der Graph von f wird mit G bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass G symmetrisch zur y-Achse verläuft. **2**

b) Die Abbildung 1 zeigt G. Skalieren Sie die Koordinatenachsen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen. **4**

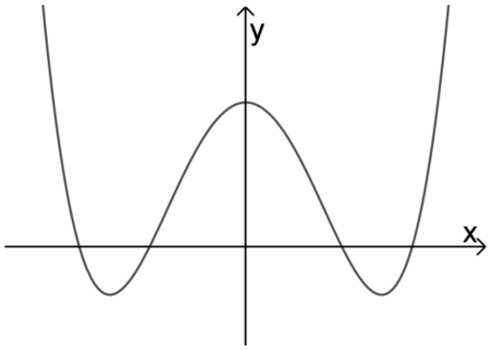


Abbildung 1

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion f' von f durch $f'(x) = 4x^3 - 8x$ beschrieben werden kann. **2**

d) Die Gleichung $f'(x) = -4$ ist im Zusammenhang mit f der Ansatz zur Lösung einer Aufgabe. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und weisen Sie nach, dass 1 eine Lösung dieser Gleichung ist. **3**

e) Betrachtet werden die Tangenten an G, die den Punkt $(0\,|\,4)$ enthalten. Dieser Punkt sowie die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der x-Achse sind Eckpunkte eines Dreiecks. Der Inhalt der Dreiecksfläche beträgt 4. Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten an G und erläutern Sie Ihr Vorgehen. **5**

f) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = e^{f(x)}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $h'(x) = f'(x)\cdot e^{f(x)}$. Untersuchen Sie, ob der Graph von h Extrempunkte besitzt. **2**

2.

Für jedes $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a : x \mapsto \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 - a\right)$ gegeben. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Die Funktion f_3 ist die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion f, die Abbildung 1 zeigt also den Graphen G_3.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte $(-1|0)$ und $(1|0)$ auf G_a liegen. 2

Die Abbildung 2 zeigt für einen bestimmten Wert von a den Graphen der Funktion p mit $p(x) = f_a(x)$ und für $b \in \mathbb{R}$ den Graphen der Funktion q mit $q(x) = p(x) + b$.

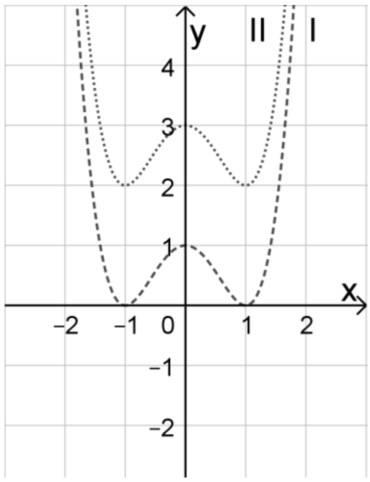


Abbildung 2

b) Begründen Sie geometrisch, dass der Wert des Integrals $\left|\int_0^1 \left(p(x) - q(x)\right) dx\right|$ und der Wert des Terms $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\left|p(0) - q(0)\right| + \left|p(1) - q(1)\right|\right)$ übereinstimmen. 3

c) Geben Sie für die Funktionen p und q die zugehörigen Graphen in Abbildung 2 an und ermitteln Sie die Werte von a und b. 3

d) Ermitteln Sie den Wert für a so, dass jede Stammfunktion F_a von f_a an der Stelle $\sqrt{3}$ eine Wendestelle hat. 3

Erhöhtes Anforderungsniveau **BE**

1.

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 3)$. Der Graph von f wird mit G bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass G symmetrisch zur y-Achse verläuft. 2

b) Die Abbildung 1 zeigt G. Skalieren Sie die Koordinatenachsen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen. 4

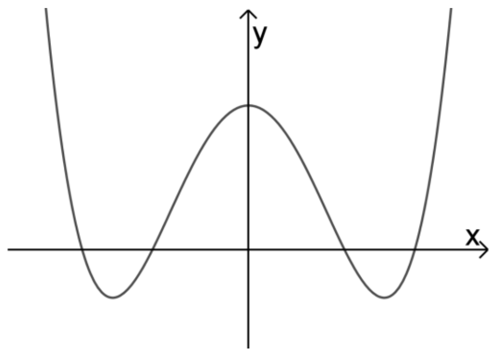


Abbildung 1

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion f' von f durch $f'(x) = 4x^3 - 8x$ beschrieben werden kann. 2

d) Die Gleichung $f'(x) = -4$ ist im Zusammenhang mit f der Ansatz zur Lösung einer Aufgabe. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und weisen Sie nach, dass 1 eine Lösung dieser Gleichung ist. 3

e) Betrachtet werden die Tangenten an G, die den Punkt $(0 \mid 4)$ enthalten. Dieser Punkt sowie die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der x-Achse sind Eckpunkte eines Dreiecks. Der Inhalt der Dreiecksfläche beträgt 4. Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten an G und erläutern Sie Ihr Vorgehen. 5

f) Betrachtet wird eine Funktion h mit $h(x) = e^{f(x)}$ und $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob der Graph von h Extrempunkte besitzt. 3

2.

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 - a\right)$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet. Die Funktion f_3 ist die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion f, die Abbildung 1 zeigt also den Graphen G_3.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau zwei Punkte gemeinsam haben, und bestimmen Sie deren Koordinaten. 3

b) Die Abbildung 2 zeigt für verschiedene Werte von a Graphen von f_a, darunter f_1 und f_4 sowie den Graphen der Funktion k mit $k(x) = f_1(x) + 2$.
Geben Sie für diese Funktionen die zugehörigen Graphen an und begründen Sie Ihre Angaben. 3

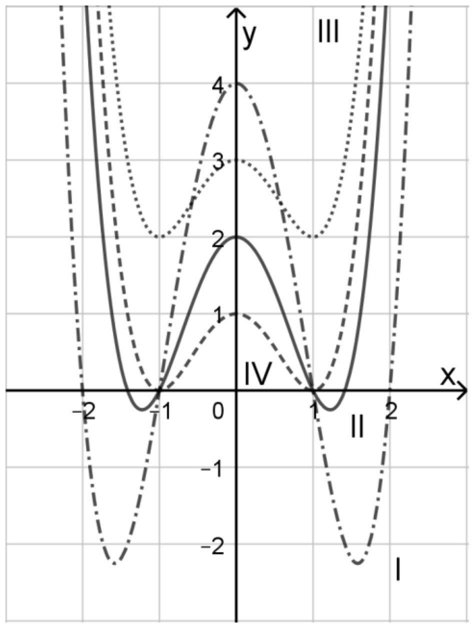


Abbildung 2

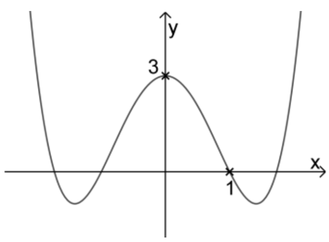
c) Für x_1 und x_2 mit $f_a(x_1) = 0$ und $f_a(x_2) = 0$ sowie $x_1 < -1$ und $x_2 > 1$ existiert ein Wert von a mit $a > 0$ so, dass $\int_{x_1}^{x_2} f_a(x)\,dx = 0$ gilt. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von a und deuten Sie diese Gleichung geometrisch. 5

3. Anregungen und Hinweise zum unterrichtlichen Einsatz

Diese Aufgabe zielt auf die Überprüfung vielfältiger Kompetenzen im Umgang mit ganzrationalen Funktionen ab, die in den Kompetenzschwerpunkten „Differentialrechnung“ und „Integralrechnung“ der Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe zu erwerben sind. Beim Erwerb wird auf die in der Sekundarstufe I in den Kompetenzschwerpunkten „Quadratische Gleichungen und quadratische Funktionen“ und „Funktionsklassen“ erworbenen Kompetenzen aufgebaut – insbesondere beim Untersuchen und Beschreiben des Einflusses von Parametern auf Lage und Form der Graphen von Funktionen untersuchen. Die Bearbeitung bietet sich als Abschluss zu den genannten Kompetenzschwerpunkten in der Qualifikationsphase an, da zu dieser Zeit alle inhaltsbezogenen und allgemeinen mathematischen Kompetenzen entwickelt sein müssten. In Kursen auf erhöhtem Anforderungsniveau wird empfohlen, beide Aufgaben einzusetzen, um den Schülerinnen und Schülern die sich quantitativ und qualitativ unterscheidenden Anforderungen im grundlegenden Anforderungsniveau von denen im erhöhten Anforderungsniveau zu zeigen.

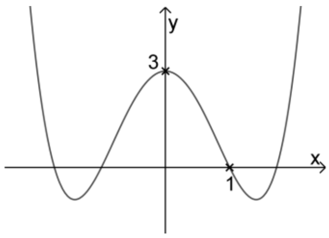
4. Lösungserwartungen

Grundlegendes Anforderungsniveau

Aufg.	Hinweise zur Lösung
1 a)	Zeigen, z. B.: $f(-x)=\left((-x)^2-1\right)\cdot\left((-x)^2-3\right)=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-3\right)=f(x)$
1 b)	Skalieren und Beschreiben, z. B.:  $f(1)=0; f(0)=3$
1 c)	Zeigen, z. B.: $f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-3\right)=x^4-4x^2+3$ $f'(x)=4x^3-8x$
1 d)	Formulieren und Nachweisen, z. B.: Aufgabenstellung: Ermitteln Sie alle Werte von x so, dass f die Steigung -4 hat. $f'(1)=4\cdot 1^3-8\cdot 1=-4$

Aufg.	Hinweise zur Lösung
1 e)	Ermitteln und Erläutern, z.B.: Das rechtwinklige Dreieck im ersten Quadranten hat den Flächeninhalt 2. Eine Kathete dieses Dreiecks hat die Länge 1 und die andere Kathete die Länge 4. Eine der beiden Tangenten wird folglich beschrieben durch $y=-4x+4$. Die Gleichung $f'(x)=4x^3-8x$ hat 1 als Lösung und es gilt $f(1)=-4\cdot 1+4$. Ein Berührpunkt hat somit die Koordinaten $(1\|0)$ und, da G symmetrisch zur y-Achse verläuft, der andere Berührpunkt die Koordinaten $(-1\|0)$.
1 f)	Untersuchen, z. B.: $h'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=-\sqrt{2} \quad \vee \quad x=0 \quad \vee \quad x=\sqrt{2}$ f' ändert an diesen Stellen das Vorzeichen.
2 a)	Zeigen, z. B.: $f_a(-1)=\left((-1)^2-1\right)\cdot\left((-1)^2-a\right)=0$ $f_a(1)=\left(1^2-1\right)\cdot\left(1^2-a\right)=0$
2 b)	Begründen, z. B.: Der Wert des Integrals stimmt näherungsweise mit dem Inhalt des Trapezes überein, dessen Höhe 1 beträgt und dessen parallele Seiten die Längen 2 haben.
2 c)	Angeben und Ermitteln, z. B.: I: f_1, da $f_1(0)=1$ II: f_1+2, da $f_1(0)+2=3$ $a=1;\ b=2$
2 d)	Ermitteln, z. B.: $F_a''\left(\sqrt{3}\right)=f_a'\left(\sqrt{3}\right)=0 \Leftrightarrow a=5$

Erhöhtes Anforderungsniveau

Aufg.	Hinweise zur Lösung
1 a)	Zeigen, z. B.: $f(-x)=\left((-x)^2-1\right)\cdot\left((-x)^2-3\right)=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-3\right)=f(x)$
1 b)	Skalieren und Beschreiben, z. B.:  $f(1)=0; f(0)=3$
1 c)	Zeigen, z. B.: $f(x)=\left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-3\right)=x^4-4x^2+3$ $f'(x)=4x^3-8x$
1 d)	Formulieren und Nachweisen, z. B.: Aufgabenstellung: Ermitteln Sie alle Werte von x so, dass f die Steigung -4 hat. $f'(1)=4\cdot1^3-8\cdot1=-4$
1 e)	Ermitteln und Erläutern, z.B.: Das rechtwinklige Dreieck im ersten Quadranten hat den Flächeninhalt 2. Eine Kathete dieses Dreiecks hat die Länge 1 und die andere Kathete die Länge 4. Eine der beiden Tangenten wird folglich beschrieben durch $y=-4x+4$. Die Gleichung $f'(x)=4x^3-8x$ hat 1 als Lösung und es gilt $f(1)=-4\cdot1+4$. Ein Berührpunkt hat somit die Koordinaten $(1\|0)$ und, da G symmetrisch zur y-Achse verläuft, der andere Berührpunkt die Koordinaten $(-1\|0)$.
1 f)	Untersuchen, z. B.: $h'(x)=f'(x)\cdot e^{f(x)}$ $h'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad f'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\sqrt{2} \quad\vee\quad x=0 \quad\vee\quad x=\sqrt{2}$ f' ändert an diesen Stellen das Vorzeichen.
2 a)	Zeigen und Bestimmen, z. B.: Für $a_1\neq a_2$ gilt: $f_{a_1}(x)=f_{a_2}(x)\Leftrightarrow x=-1 \quad\vee\quad x=1$ $f_a(-1)=f_a(1)=0$

Aufg.	Hinweise zur Lösung
2 b)	Angeben und Begründen, z. B.: I: f_4, da $f_4(0)=4$ IV: f_1, da $f_1(0)=1$ III: f_1+2, da $f_1(0)+2=3$
2 c)	Ermitteln und Deuten, z. B.: Aufgrund der Symmetrie von G_a genügt es, $\int_0^{\sqrt{a}} f_a(x)\,dx=0$ zu betrachten. Es gilt: $\int_0^{\sqrt{a}} f_a(x)\,dx=\left[\frac{x^5}{5}-\frac{a}{3}x^3-\frac{x^3}{3}+ax\right]_0^{\sqrt{a}}=\frac{a^2\sqrt{a}}{5}-\frac{a^2\sqrt{a}}{3}-\frac{a\sqrt{a}}{3}+a\sqrt{a}=a\sqrt{a}\cdot\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{15}a\right);$ $\frac{2}{3}-\frac{2}{15}a=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=5$ Der orientierte Inhalt der unterhalb der x-Achse liegenden Flächen, die von G_5 und der x-Achse eingeschlossen werden, ist gleich groß zum Inhalt der oberhalb der x-Achse liegenden Fläche, die von G_5 und der x-Achse eingeschlossen wird.

Einordnung der Kompetenzen

Grundlegendes Anforderungsniveau

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1a	2					I		x		
1b	4	II			II				x	
1c	2					I		x		
1d	3					I	II		x	
1e	5	II	III				II			x
1f	2	II				II			x	
2a	2					I		x		
2b	3	II			II	I			x	
2c	3	II				II			x	
2d	3		III			II				x

Erhöhtes Anforderungsniveau

Teil-aufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1a	2					I		x		
1b	4	II			II				x	
1c	2					I		x		
1d	3					I	II		x	
1e	5	II	III				II			x
1f	3	II				II			x	
2a	3								x	
2b	3	II			II	I			x	
2c	5	III	III		II	II				x