## 1. Aufgabe

| Art der Aufgabe | Hilfsmittel | Arbeitszeit | Schuljahrgänge |
|---|---|---|---|
| Leistungsaufgabe | WTR | 90 min | 11/12 |

**Grundlegendes Anforderungsniveau** — **BE**

**1.**

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \left(x^2-1\right)\cdot\left(x^2-3\right)$. Der Graph von f wird mit G bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass G symmetrisch zur y-Achse verläuft. — 2

b) Die Abbildung 1 zeigt G. Skalieren Sie die Koordinatenachsen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen. — 4

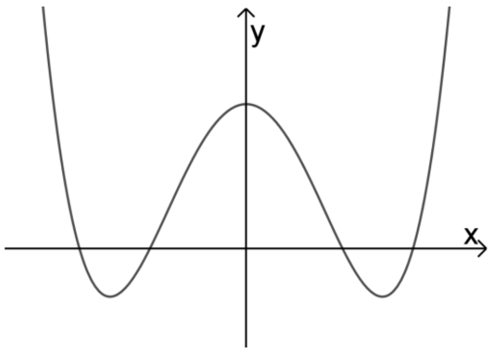


Abbildung 1

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion $f'$ von f durch $f'(x) = 4x^3 - 8x$ beschrieben werden kann. — 2

d) Die Gleichung $f'(x) = -4$ ist im Zusammenhang mit f der Ansatz zur Lösung einer Aufgabe. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und weisen Sie nach, dass 1 eine Lösung dieser Gleichung ist. — 3

e) Betrachtet werden die Tangenten an G, die den Punkt $(0\,|\,4)$ enthalten. Dieser Punkt sowie die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der x-Achse sind Eckpunkte eines Dreiecks. Der Inhalt der Dreiecksfläche beträgt 4. Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten an G und erläutern Sie Ihr Vorgehen. — 5

f) Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = e^{f(x)}$ und $x \in \mathbb{R}$. Es gilt $h'(x) = f'(x)\cdot e^{f(x)}$. Untersuchen Sie, ob der Graph von h Extrempunkte besitzt. — 2

**2.**

Für jedes $a \in \mathbb{R}_0^+$ ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f_a : x \mapsto (x^2 - 1) \cdot (x^2 - a)$ gegeben. Der Graph von $f_a$ wird mit $G_a$ bezeichnet. Die Funktion $f_3$ ist die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion f, die Abbildung 1 zeigt also den Graphen $G_3$.

a) Zeigen Sie, dass die Punkte $(-1|0)$ und $(1|0)$ auf $G_a$ liegen. 2

Die Abbildung 2 zeigt für einen bestimmten Wert von a den Graphen der Funktion p mit $p(x) = f_a(x)$ und für $b \in \mathbb{R}$ den Graphen der Funktion q mit $q(x) = p(x) + b$.

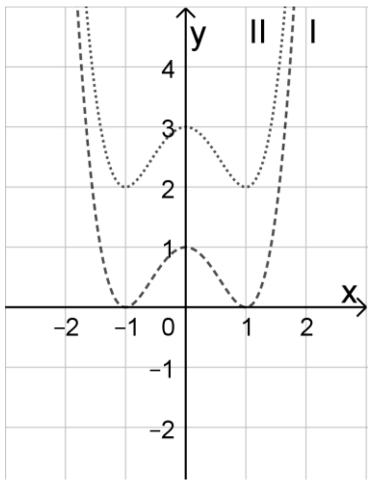


Abbildung 2

b) Begründen Sie geometrisch, dass der Wert des Integrals $\left| \int_0^1 (p(x) - q(x))\,dx \right|$ und der Wert des Terms $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left( |p(0) - q(0)| + |p(1) - q(1)| \right)$ übereinstimmen. 3

c) Geben Sie für die Funktionen p und q die zugehörigen Graphen in Abbildung 2 an und ermitteln Sie die Werte von a und b. 3

d) Ermitteln Sie den Wert für a so, dass jede Stammfunktion $F_a$ von $f_a$ an der Stelle $\sqrt{3}$ eine Wendestelle hat. 3

**Erhöhtes Anforderungsniveau** **BE**

**1.**

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 - 3\right)$. Der Graph von f wird mit G bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass G symmetrisch zur y-Achse verläuft. 2

b) Die Abbildung 1 zeigt G. Skalieren Sie die Koordinatenachsen und beschreiben Sie Ihr Vorgehen. 4

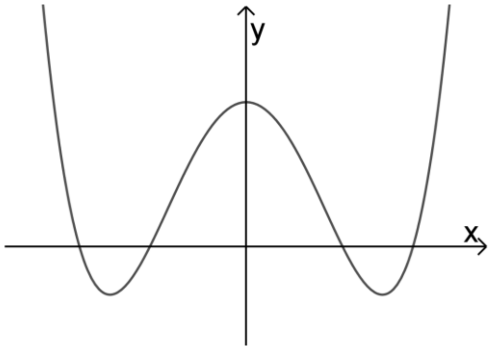


Abbildung 1

c) Zeigen Sie, dass die erste Ableitungsfunktion $f'$ von f durch $f'(x) = 4x^3 - 8x$ beschrieben werden kann. 2

d) Die Gleichung $f'(x) = -4$ ist im Zusammenhang mit f der Ansatz zur Lösung einer Aufgabe. Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und weisen Sie nach, dass 1 eine Lösung dieser Gleichung ist. 3

e) Betrachtet werden die Tangenten an G, die den Punkt $(0\,|\,4)$ enthalten. Dieser Punkt sowie die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der x-Achse sind Eckpunkte eines Dreiecks. Der Inhalt der Dreiecksfläche beträgt 4. Ermitteln Sie die Koordinaten der Berührpunkte der Tangenten an G und erläutern Sie Ihr Vorgehen. 5

f) Betrachtet wird eine Funktion h mit $h(x) = e^{f(x)}$ und $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie, ob der Graph von h Extrempunkte besitzt. 3

**2.**

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a: x \mapsto (x^2 - 1) \cdot (x^2 - a)$ mit $a \in \mathbb{R}_0^+$. Der Graph von $f_a$ wird mit $G_a$ bezeichnet. Die Funktion $f_3$ ist die in Aufgabe 1 betrachtete Funktion f, die Abbildung 1 zeigt also den Graphen $G_3$.

a) Zeigen Sie, dass alle Graphen der Schar genau zwei Punkte gemeinsam haben, und bestimmen Sie deren Koordinaten. 3

b) Die Abbildung 2 zeigt für verschiedene Werte von a Graphen von $f_a$, darunter $f_1$ und $f_4$ sowie den Graphen der Funktion k mit $k(x) = f_1(x) + 2$.
Geben Sie für diese Funktionen die zugehörigen Graphen an und begründen Sie Ihre Angaben. 3

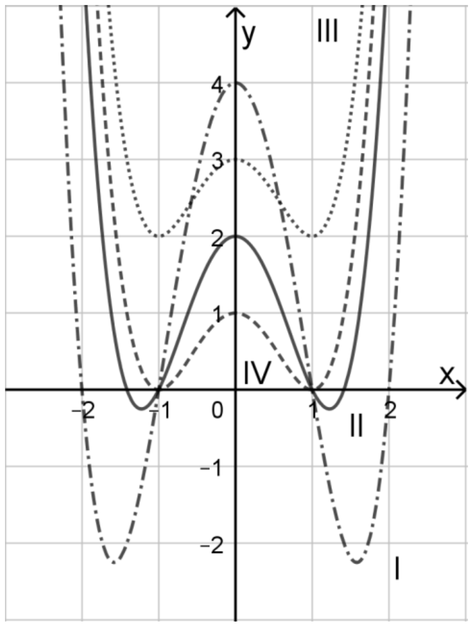

Abbildung 2

c) Für $x_1$ und $x_2$ mit $f_a(x_1) = 0$ und $f_a(x_2) = 0$ sowie $x_1 < -1$ und $x_2 > 1$ existiert ein Wert von a mit $a > 0$ so, dass $\int_{x_1}^{x_2} f_a(x)\,dx = 0$ gilt. Ermitteln Sie den zugehörigen Wert von a und deuten Sie diese Gleichung geometrisch. 5